2022 年全国硕士研究生招生考试

数学(三)试题

一、选择题:1 ~ 10 小题,每小题 5 分,共 50 分,下列每题给出的四个选项中,只有一个选项是符合题目要求的,请将所选选项前的字母填在答题卡指定位置.

(1) 当 $x \to 0$ 时,$\alpha(x)$,$\beta(x)$ 是非零无穷小量,给出以下四个命题:

① 若 $\alpha(x) \sim \beta(x)$,则 $\alpha^2(x) \sim \beta^2(x)$

② 若 $\alpha^2(x) \sim \beta^2(x)$,则 $\alpha(x) \sim \beta(x)$

③ 若 $\alpha(x) \sim \beta(x)$,则 $\alpha(x) - \beta(x) = o(\alpha(x))$

④ 若 $\alpha(x) - \beta(x) = o(\alpha(x))$,则 $\alpha(x) \sim \beta(x)$

其中正确的序号是(　　).

(A) ①②　　(B) ①④　　(C) ①③④　　(D) ②③④

(2) 已知 $a_n = \sqrt[n]{n} - \frac{(-1)^n}{n}(n = 1,2,\cdots)$,则 $\{a_n\}$(　　).

(A) 有最大值,有最小值　　(B) 有最大值,没有最小值

(C) 没有最大值,有最小值　　(D) 没有最大值,没有最小值

(3) 设函数 $f(t)$ 连续,令 $F(x,y) = \int_0^{x-y}(x-y-t)f(t)\mathrm{d}t$,则(　　).

(A) $\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial^2 F}{\partial^2 x} = \frac{\partial^2 F}{\partial^2 y}$　　(B) $\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial^2 F}{\partial^2 x} = -\frac{\partial^2 F}{\partial^2 y}$

(C) $\frac{\partial F}{\partial x} = -\frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial^2 F}{\partial^2 x} = \frac{\partial^2 F}{\partial^2 y}$　　(D) $\frac{\partial F}{\partial x} = -\frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial^2 F}{\partial^2 x} = -\frac{\partial^2 F}{\partial^2 y}$

(4) 已知 $I_1 = \int_0^1 \frac{x}{2(1+\cos x)}\mathrm{d}x, I_2 = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+\cos x}\mathrm{d}x, I_3 = \int_0^1 \frac{2x}{1+\sin x}\mathrm{d}x$,则(　　).

A) $I_1 < I_2 < I_3$　　(B) $I_2 < I_1 < I_3$

(C) $I_1 < I_3 < I_2$　　(D) $I_3 < I_2 < I_1$

(5) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵,$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,则 $\boldsymbol{A}$ 特征值为 $1,-1,0$ 的充分必要条件是(　　).

(A) 存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}$,使得 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P\Lambda Q}$

(B) 存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$,使得 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P\Lambda P}^{-1}$

(C) 存在正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$,使得 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{Q\Lambda Q}^{-1}$

(D) 存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$,使得 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P\Lambda P}^{\mathrm{T}}$

(6) 设矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$,则线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 解的情况为(　　).

(A) 无解　　(B) 有解

(C) 有无穷多解或无解　　(D) 有唯一解或无解

(7) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}\lambda\\1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\\lambda\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\1\\\lambda\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}1\\\lambda\\\lambda^2\end{pmatrix}$. 若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$ 等价，则 λ 的取值范围是(　　).

(A) $\{0,1\}$　　(B) $\{\lambda\mid\lambda\in R,\lambda\neq-2\}$

(C) $\{\lambda\mid\lambda\in R,\lambda\neq-1,\lambda\neq-2\}$　　(D) $\{\lambda\mid\lambda\in R,\lambda\neq-1\}$

(8) 设随机变量 $X\sim N(0,4)$，随机变量 $Y\sim B\left(3,\dfrac{1}{3}\right)$，且 X 与 Y 不相关，则 $D(X-3Y+1)=$(　　).

(A) 2　　(B) 4　　(C) 6　　(D) 10

(9) 设随机变量序列 $X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots$ 独立同分布，且 X_1 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}1-|x|, & |x|<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$，则当 $n\to\infty$ 时，$\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2$ 依概率收敛于(　　).

(A) $\dfrac{1}{8}$　　(B) $\dfrac{1}{6}$　　(C) $\dfrac{1}{3}$　　(D) $\dfrac{1}{2}$

(10) 设二维随机变量 (X,Y) 的概率分布

X \ Y	0	1	2
-1	0.1	0.1	b
1	a	0.1	0.1

若事件 $\{\max\{X,Y\}=2\}$ 与事件 $\{\min\{X,Y\}=1\}$ 相互独立，则 $Cov(X,Y)=$(　　).

(A) -0.6　　(B) -0.36　　(C) 0　　(D) 0.48

二、填空题：11 ～ 16 小题，每小题 5 分，共 30 分.

(11) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1+\mathrm{e}^x}{2}\right)^{\cot x}=$ ________.

(12) $\displaystyle\int_0^2\frac{2x-4}{x^2+2x+4}\mathrm{d}x=$ ________.

(13) 已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^{\sin x}+\mathrm{e}^{-\sin x}$，则 $f'''(2\pi)=$ ________.

(14) 已知函数 $f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^x, & 0\leqslant x\leqslant1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$，则 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)f(y-x)\mathrm{d}y=$ ________.

(15) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵，交换 $\boldsymbol{A}$ 的第 2 行和第 3 行，再将第 2 列的 -1 倍加到第 1 列，得到矩阵 $\begin{pmatrix}-2&1&-1\\1&-1&0\\-1&0&0\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的迹 $tr(\boldsymbol{A}^{-1})=$ ________.

(16) 设 A,B,C 为随机事件，且 A 与 B 互不相容，A 与 C 互不相容，B 与 C 相互独立，$P(A)=P(B)=P(C)=\dfrac{1}{3}$，则 $P(B\cup C|A\cup B\cup C)=$ ________.

三、解答题：17 ～ 22 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(17)(本题满分 10 分)

设函数 $y(x)$ 是微分方程 $y' + \frac{1}{2\sqrt{x}}y = 2 + \sqrt{x}$ 满足条件 $y(1) = 3$ 的解,求曲线 $y = y(x)$ 的渐近线.

(18) 设某产品的产量 Q 由资本投入量 x 和劳动投入量 y 决定,生产函数为 $Q = 12x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{6}}$,该产品的销售单价 P 与 Q 的关系为 $P = 1160 - 1.5Q$,若单位资本投入和单位劳动投入的价格分别为 6 和 8,求利润最大时的产量.

(19)(本题满分 12 分)

已知平面区域 $D = \{(x,y) \mid y-2 \leqslant x \leqslant \sqrt{4-y^2}, 0 \leqslant y \leqslant 2\}$,计算 $I = \iint\limits_D \frac{(x-y)^2}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

(20)(本题满分 12 分)

求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-4)^n + 1}{4^n(2n+1)}x^{2n}$ 的收敛域及和函数 $S(x)$.

(21)(本题满分 12 分)

已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3) = 3x_1^2 + 4x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_3$,

(1) 求正交变换 $\boldsymbol{x} = Q\mathrm{y}$ 将 $f(x_1,x_2,x_3)$ 化为标准型;

(2) 证明:$\min \frac{f(x)}{x^{\mathrm{T}}x} = 2$.

(22)(本题满分 12 分)

设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为来自均值为 θ 的指数分布总体的简单随机样本,$Y_1, Y_2, \cdots, Y_m$ 为来自均值为 2θ 的指数分布总体的简单随机样本,且两样本相互独立,其中 $\theta(\theta > 0)$ 是未知参数. 利用样本 $X_1, X_2, \cdots, X_n, Y_1, Y_2, \cdots, Y_m$,求 θ 的最大似然估计量 $\hat{\theta}$,并求 $D(\hat{\theta})$.

2022 年数学(三)试题解析

一、选择题

(1)【答案】(C)　(2)【答案】(A)　(3)【答案】(C)　(4)【答案】(A)

(5)【答案】(B)　(6)【答案】(D)　(7)【答案】(C)　(8)【答案】(D)

(9)【答案】(B)　(10)【答案】(B)

二、填空题

(11)【答案】$e^{\frac{1}{2}}$.　(12)【答案】$\ln 3-\frac{\sqrt{3}}{3}\pi$.(13)【答案】0.

(14)【答案】$(e-1)^2$.(15)【答案】-1.　(16)【答案】$\frac{5}{8}$.

三、解答题

(17)【答案】$y(x)=2x+e^{1-\sqrt{x}}$；$y=2x$ 为曲线 $y=y(x)$ 的斜渐近线.

(18)【答案】利润 L 在 $Q=384$ 处取得最大值.

(19)【答案】$2\pi-2$.

(20)【答案】收敛域为$[-1,1]$；

$$S(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}\arctan x+\frac{1}{x}\ln\frac{2+x}{2-x}, & x\neq 0, x\in[-1,1]\\ 2, & x=0\end{cases}.$$

(21)【答案】(1) 令 $\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$，在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Qy}$ 下，二次型的标准形为 $4y_1^2+4y_2^2+2y_3^2$.

(2) 最小值为 2.

(22)【答案】θ 的最大似然估计量 $\hat{\theta}=\frac{1}{m+n}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}Y_j\right)$；$D(\hat{\theta})=\frac{\theta^2}{m+n}$.

答案详解请参考《考研数学真题大解析》(标准版)(数学三) 丁勇主编 中国政法大学出版社出版