2023 年全国硕士研究生招生考试

数学(三)试题

一、选择题:1 ~ 10 小题,每小题 5 分,共 50 分. 下列每题给出的四个选项中,只有一个选项是最符合题目要求的,请将所选选项前的字母填在答题纸指定位置上.

(1) 已知函数 $f(x,y) = \ln(y + |x\sin y|)$,则(　　)

(A) $\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,1)}$ 不存在,$\left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,1)}$ 存在　　(B) $\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,1)}$ 存在,$\left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,1)}$ 不存在

(C) $\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,1)}$,$\left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,1)}$ 均存在　　(D) $\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,1)}$,$\left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,1)}$ 均不存在

(2) 函数 $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}, x \leqslant 0 \\ (x+1)\cos x, x > 0 \end{cases}$ 的原函数为(　　)

(A) $F(x) = \begin{cases} \ln(\sqrt{1+x^2} - x), x \leqslant 0 \\ (x+1)\cos x - \sin x, x > 0 \end{cases}$

(B) $F(x) = \begin{cases} \ln(\sqrt{1+x^2} - x) + 1, x \leqslant 0 \\ (x+1)\cos x - \sin x, x > 0 \end{cases}$

(C) $F(x) = \begin{cases} \ln(\sqrt{1+x^2} + x), x \leqslant 0 \\ (x+1)\sin x + \cos x, x > 0 \end{cases}$

(D) $F(x) = \begin{cases} \ln(\sqrt{1+x^2} + x) + 1, x \leqslant 0 \\ (x+1)\sin x + \cos x, x > 0 \end{cases}$

(3) 已知微分方程 $y'' + ay' + by = 0$ 的解在 $(-\infty, \infty)$ 上有界,则(　　)

(A) $a < 0, b > 0$　　(B) $a > 0, b > 0$

(C) $a = 0, b > 0$　　(D) $a = 0, b < 0$

(4) 已知 $a_n < b_n (n = 1,2,\cdots)$,若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 均收敛,则“级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛”是“级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 绝对收敛”的(　　)

(A) 充分必要条件　　(B) 充分不必要条件

(C) 必要不充分条件　　(D) 既不充分也不必要条件

(5) 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 为 n 阶可逆矩阵,$\boldsymbol{E}$ 为 n 阶单位矩阵,$\boldsymbol{M}^*$ 为矩阵 $\boldsymbol{M}$ 的伴随矩阵,则 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{E} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \end{pmatrix}^* =$ (　　)

(A) $\begin{pmatrix} |A|B^* & -B^*A^* \\ O & |B|A^* \end{pmatrix}$ (B) $\begin{pmatrix} |A|B^* & -A^*B^* \\ O & |B|A^* \end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix} |B|A^* & -B^*A^* \\ O & |A|B^* \end{pmatrix}$ (D) $\begin{pmatrix} |B|A^* & -A^*B^* \\ O & |A|B^* \end{pmatrix}$

(6) 二次型$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2)^2+(x_1+x_3)^2-4(x_2-x_3)^2$的规范形为( )

(A) $y_1^2+y_2^2$ (B) $y_1^2-y_2^2$

(C) $y_1^2+y_2^2-4y_3^2$ (D) $y_1^2+y_2^2-y_3^2$

(7) 已知向量$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}2\\5\\9\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$,若$\gamma$既可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$线性表示,也可由$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$线性表示,则$\gamma=$( )

(A) $k\begin{pmatrix}3\\3\\4\end{pmatrix},k\in R$ (B) $k\begin{pmatrix}3\\5\\10\end{pmatrix},k\in R$

(C) $k\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix},k\in R$ (D) $k\begin{pmatrix}1\\5\\8\end{pmatrix},k\in R$

(8) 设随机变量X服从参数为1的泊松分布,则$E(|X-EX|)=$( )

(A) $\frac{1}{e}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{2}{e}$ (D) 1

(9) 设$X_1,X_2,\cdots,X_n$为来自总体$N(\mu_1,\sigma^2)$的简单随机样本,$Y_1,Y_2,\cdots,Y_m$为来自总体$N(\mu_2,2\sigma^2)$的简单随机样本,且两样本相互独立,记$\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i,\bar{Y}=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}Y_i,S_1^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2,S_2^2=\frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}(Y_i-\bar{Y})^2$,则( )

(A) $\frac{S_1^2}{S_2^2}\sim F(n,m)$ (B) $\frac{S_1^2}{S_2^2}\sim F(n-1,m-1)$

(C) $\frac{2S_1^2}{S_2^2}\sim F(n,m)$ (D) $\frac{2S_1^2}{S_2^2}\sim F(n-1,m-1)$

(10) 设X_1,X_2为来自总体$N(\mu,\sigma^2)$的简单随机样本,其中$\sigma(\sigma>0)$是未知参数,记$\hat{\sigma}=a|X_1-X_2|$,若$E(\hat{\sigma})=\sigma$,则$a=$( )

(A) $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ (B) $\frac{\sqrt{2\pi}}{2}$ (C) $\sqrt{\pi}$ (D) $\sqrt{2\pi}$

二、填空题:11 ~ 16 小题,每小题 5 分,共 30 分. 请将答案写在答题纸指定位置上.

(11) $\lim\limits_{x\to\infty}x^2\left(2-x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}\right)=$ ________.

(12) 已知函数$f(x,y)$满足$\mathrm{d}f(x,y)=\dfrac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$,$f(1,1)=\dfrac{\pi}{4}$,则$f(\sqrt{3},3)=$________.

(13) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}=$________.

(14) 设某公司在t时刻的资产为$f(t)$,从0时刻到t时刻的平均资产等于$\dfrac{f(t)}{t}-t$. 假设$f(t)$连续且$f(0)=0$,则$f(t)=$________.

(15) 已知线性方程组$\begin{cases}ax_1+x_3=1\\x_1+ax_2+x_3=0\\x_1+2x_2+ax_3=0\\ax_1+bx_2=2\end{cases}$有解,其中$a,b$为常数,若$\begin{vmatrix}a&0&1\\1&a&1\\1&2&a\end{vmatrix}=4$,则$\begin{vmatrix}1&a&1\\1&2&a\\a&b&0\end{vmatrix}=$________.

(16) 设随机变量X与Y相互独立,且$X\sim B(1,p)$,$Y\sim B(2,p)$,$p\in(0,1)$,则$X+Y$与$X-Y$的相关系数为________.

三、解答题:17 ~ 22 小题,共 70 分. 请将解答写在答题纸指定位置上. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(17)(本题满分 10 分)

已知可导函数$y=y(x)$满足$ae^x+y^2+y-\ln(1+x)\cos y+b=0$,且$y(0)=0$,$y'(0)=0$.

(1) 求a,b的值.

(2) 判断$x=0$是否为$y(x)$的极值点.

(18)(本题满分 12 分)

已知平面区域$D=\left\{(x,y)\,\middle|\,0\leqslant y\leqslant\dfrac{1}{x\sqrt{1+x^2}},x\geqslant1\right\}$

(1) 求D的面积.

(2) 求D绕x轴旋转所成旋转体的体积.

(19)(本题满分 12 分)

已知平面区域$D=\{(x,y)\mid(x-1)^2+y^2\leqslant1\}$,计算二重积分$\iint\limits_D\left|\sqrt{x^2+y^2}-1\right|\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

(20)(本题满分 12 分)

设函数$f(x)$在$[-a,a]$上具有2阶连续导数,证明:

(1) 若$f(0)=0$,则存在$\xi\in(-a,a)$,使得$f''(\xi)=\dfrac{1}{a^2}[f(a)+f(-a)]$.

(2) 若$f(x)$在$(-a,a)$内取得极值,则存在$\eta\in(-a,a)$使得$|f''(\eta)|\geqslant$

$\frac{1}{2a^2}|f(a)-f(-a)|$.

(21)(本题满分 12 分)

设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足对任意 x_1, x_2, x_3 均有 $\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + x_3 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 \\ x_2 - x_3 \end{pmatrix}$

(1) 求 A;

(2) 求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 与对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$,使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{\Lambda}$.

(22)(本题满分 12 分)

设随机变量 X 的概率密度为 $f(x) = \frac{e^x}{(1+e^x)^2}, -\infty < x < +\infty$,令 $Y = e^x$.

(1) 求 X 的分布函数;

(2) 求 Y 的概率密度;

(3) Y 的期望是否存在?

2023 年数学(三)试题解析

一、选择题

(1)【答案】(A)　(2)【答案】(D)　(3)【答案】(C)　(4)【答案】(A)

(5)【答案】(B)　(6)【答案】(B)　(7)【答案】(D)　(8)【答案】(C)

(9)【答案】(D)　(10)【答案】(A)

二、填空题

(11)【答案】$\frac{2}{3}$.　(12)【答案】$\frac{\pi}{3}$.　(13)【答案】$\frac{1}{2}e^x+\frac{1}{2}e^{-x}$.

(14)【答案】$2e^t-2t-2$.　(15)【答案】8.　(16)【答案】$-\frac{1}{3}$.

三、解答题

(17)【答案】(1)$a=1,b=-1$;(2) $x=0$ 是 $y(x)$ 的极大值点.

(18)【答案】(1) $\ln(1+\sqrt{2})$;(2) $\pi\left(1-\frac{\pi}{4}\right)$.

(19)【答案】$-\frac{\pi+32}{9}+3\sqrt{3}$.

(20)【答案】泰勒公式和介值定理.

(21)【答案】(1) $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&-1&1\\0&1&-1\end{pmatrix}$; (2) 令 $P=\begin{pmatrix}0&4&1\\-1&3&0\\1&1&-2\end{pmatrix}$, 则 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}-2&0&0\\0&2&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$.

(22)【答案】(1) $F(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{e^t}{(1+e^t)^2}\mathrm{d}t=-\frac{1}{1+e^t}\Big|_{-\infty}^{x}=\frac{e^x}{1+e^x},x\in R$;

(2) $f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{(1+y)^2}, & y>0\\ 0, & 其他\end{cases}$;(3) Y 的期望不存在.

答案详解请参考《考研数学真题大解析》(标准版)(数学三) 丁勇主编 中国政法大学出版社出版