2024年全国硕士研究生招生考试数学(三)试题

选择题（共10题，共50分）

1. (单选题) 5分

设函数$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+x}{1+nx^{2n}}$，则$f(x)$( )

A.在$x=1$，$x=-1$处都连续B.在$x=1$处连续，$x=-1$处不连续

C.在$x=1$，$x=-1$处都不连续D.在$x=1$处不连续，$x=-1$处连续

2. (单选题) 5分

设$I=\int_a^{a+k\pi}|\sin x|dx$,$k$为整数,则$I$的值( )

A.只与a有关B.只与k有关C.与a，k均有关D.与a，k均无关

3. (单选题) 5分

设$f(x,y)$是连续函数，则$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}dx\int_{\sin x}^{1}f(x,y)dy=$( )

A.$\int_{\frac{1}{2}}^{1}dy\int_{\frac{\pi}{6}}^{arc\sin y}f(x,y)dx$B.$\int_{\frac{1}{2}}^{1}dy\int_{arc\sin y}^{\frac{\pi}{2}}f(x,y)dx$

C. $\int_0^{\frac{1}{2}}dy\int_{\frac{\pi}{6}}^{arc\sin y}f(x,y)dx$D.$\int_0^{\frac{1}{2}}dy\int_{arc\sin y}^{\frac{\pi}{2}}f(x,y)dx$

4. (单选题) 5分

设幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$的和函数为$\ln(2+x)$，则$\sum\limits_{n=0}^{\infty}na_{2n}=$( )

A.$-\frac{1}{6}$B.$-\frac{1}{3}$C.$\frac{1}{6}$D.$\frac{1}{3}$

5. (单选题) 5分

设二次型$f(x_1,x_2,x_3)=x^TAx$在正交变换下可化成 $y_1^2-2y_2^2+3y_3^2$，则二次型f的矩阵A的行列式与迹分别为( )

A. - 6， - 2B.6， - 2C. - 6，2D.6，2

6. (单选题) 5分

设A为3阶矩阵，$P=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$.若$P^TAP^2=\begin{pmatrix}a+2c&0&c\\0&b&0\\2c&0&c\end{pmatrix}$，则$A$=( )

A. $\begin{pmatrix}c&0&0\\0&a&0\\0&0&b\end{pmatrix}$B. $\begin{pmatrix}b&0&0\\0&c&0\\0&0&a\end{pmatrix}$C. $\begin{pmatrix}a&0&0\\0&b&0\\0&0&c\end{pmatrix}$D. $\begin{pmatrix}c&0&0\\0&b&0\\0&0&a\end{pmatrix}$

7. (单选题) 5分

设矩阵$A=\begin{pmatrix}a+1&b&3\\a&\frac{b}{2}&1\\1&1&2\end{pmatrix}$，$M_{ij}$表示$A$的$i$行$j$列元素的余子式.若$|A|=-\frac{1}{2}$，且$-M_{21}+M_{22}-M_{23}=0$，则( )

A.$a=0$或$a=-\frac{3}{2}$B.$a=0$或$a=\frac{3}{2}$C. $b=1$或$b=-\frac{1}{2}$D. $b=-1$或$b=\frac{1}{2}$

8. (单选题) 5分

设随机变量X的概率密度为$f(x)=\begin{cases}6x(1-x),0<x<1\\0，其他\end{cases}$，则$X$的三阶中心距

$E(X-EX)^3=(\ )$

A. $-\frac{1}{32}$B.0C. $\frac{1}{16}$D. $\frac{1}{2}$

9. (单选题) 5分

随机变量X，Y相互独立，其$X\sim N(0,2)$,$Y\sim N(-1,1)$，记$p_1=P\{2X>Y\}$，$p_2=P\{X-2Y>1\}$，则( )

A.$p_1>p_2>\frac{1}{2}$B.$p_2>p_1>\frac{1}{2}$C. $p_1<p_2<\frac{1}{2}$D.$p_2<p_1<\frac{1}{2}$

10. (单选题) 5分

设随机变量X，Y相互独立，且均服从参数为λ的指数分布，令$Z=|X-Y|$，则下列随机变量中与Z同分布的是( )

A.$X+Y$B.$\frac{X+Y}{2}$C. $2X$D.X

选择题 (共10题，共50分)

1. (单选题) 5分

设函数$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+x}{1+nx^{2n}}$，则$f(x)$( )

A.在$x=1$，$x=-1$处都连续B.在$x=1$处连续，$x=-1$处不连续

C.在$x=1$，$x=-1$处都不连续D.在$x=1$处不连续，$x=-1$处连续

2. (单选题) 5分

设$I=\int_a^{a+k\pi}|\sin x|dx$,$k$为整数,则$I$的值( )

A.只与a有关B.只与k有关C.与a，k均有关D.与a，k均无关

3. (单选题) 5分

设$f(x,y)$是连续函数，则$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}dx\int_{\sin x}^{1}f(x,y)dy=(\ )$

A.$\int_{\frac{1}{2}}^{1}dy\int_{\frac{\pi}{6}}^{\arcsin y}f(x,y)dx$B.$\int_{\frac{1}{2}}^{1}dy\int_{\arcsin y}^{\frac{\pi}{2}}f(x,y)dx$

C. $\int_0^{\frac{1}{2}}dy\int_{\frac{\pi}{6}}^{\arcsin y}f(x,y)dx$D.$\int_0^{\frac{1}{2}}dy\int_{\arcsin y}^{\frac{\pi}{2}}f(x,y)dx$

4. (单选题) 5分

设幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$的和函数为$\ln(2+x)$，则$\sum\limits_{n=0}^{\infty}na_{2n}=(\ )$

A. $-\frac{1}{6}$B. $-\frac{1}{3}$C. $\frac{1}{6}$D. $\frac{1}{3}$

5. (单选题) 5分

设二次型$f(x_1,x_2,x_3)=x^TAx$在正交变换下可化成 $y_1^2-2y_2^2+3y_3^2$，则二次型f的矩阵A的行列式与迹分别为( )

A. - 6， - 2B. 6， - 2C. - 6，2D. 6，2

6. (单选题) 5分

设A为3阶矩阵，$P=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$.若$P^TAP^2=\begin{pmatrix}a+2c&0&c\\0&b&0\\2c&0&c\end{pmatrix}$，则$A$=( )

A. $\begin{pmatrix}c&0&0\\0&a&0\\0&0&b\end{pmatrix}$B. $\begin{pmatrix}b&0&0\\0&c&0\\0&0&a\end{pmatrix}$C. $\begin{pmatrix}a&0&0\\0&b&0\\0&0&c\end{pmatrix}$D. $\begin{pmatrix}c&0&0\\0&b&0\\0&0&a\end{pmatrix}$

7. (单选题) 5分

设矩阵$A=\begin{pmatrix}a+1&b&3\\a&\frac{b}{2}&1\\1&1&2\end{pmatrix}$，$M_{ij}$表示$A$的$i$行$j$列元素的余子式.若$|A|=-\frac{1}{2}$，且$-M_{21}+M_{22}-M_{23}=0$，则( )

A. $a=0$或$a=-\frac{3}{2}$B. $a=0$或$a=\frac{3}{2}$C. $b=1$或$b=-\frac{1}{2}$D. $b=-1$或$b=\frac{1}{2}$

8. (单选题) 5分

设随机变量X的概率密度为$f(x)=\begin{cases}6x(1-x),0<x<1\\0，其他\end{cases}$，则$X$的三阶中心距$E(X-EX)^3$=( )

A. $-\frac{1}{32}$B. 0C. $\frac{1}{16}$D. $\frac{1}{2}$

9. (单选题) 5分

随机变量X，Y相互独立，其$X\sim N(0,2)$,$Y\sim N(-1,1)$，记$p_1=P\{2X>Y\}$，$p_2=P\{X-2Y>1\}$，则( )

A. $p_1>p_2>\frac{1}{2}$B. $p_2>p_1>\frac{1}{2}$C. $p_1<p_2<\frac{1}{2}$D. $p_2<p_1<\frac{1}{2}$

10. (单选题) 5分

设随机变量X，Y相互独立，且均服从参数为λ的指数分布，令$Z=|X-Y|$，则下列随机变量中与Z同分布的是( )

A. $X+Y$B. $\frac{X+Y}{2}$C. $2X$D. X

填空题（共6题，共30分）

11. (填空题) 5分

当$x \to 0$时，$\int_0^x \frac{(1+t^2)\sin t^2}{1+\cos t^2}dt$与$x^k$是同阶无穷小，则$k =$_______.

12.（填空题）5分

$\int_2^{+\infty} \frac{5}{x^4+3x^2-4}dx =$ ________.

13.（填空题）5分

函数$f(x, y) = 2x^3 - 9x^2 - 6y^4 + 12x + 24y$的极值点是_________.

14.（填空题）5分

某产品的价格函数为$p = \begin{cases} 25 - 0.25Q, Q \le 20, \\ 35 - 0.75Q, Q > 20 \end{cases}$（$p$为单价，单位：万元；$Q$为产量，单位：件），总成本函数为$C = 150 + 5Q + 0.25Q^2$（万元），则经营该产品可获得的最大利润为_________（万元）.

15.（填空题）5分

设A为3阶矩阵，A^*为A的伴随矩阵，E为3阶单位矩阵.若$r(2E - A) = 1$，$r(E + A) = 2$，则$|A^*| =$________.

16.（填空题）5分

设随机试验每次成功的概率为p，现进行3次独立重复试验，在至少成功1次的条件下3次试验全部成功的概率为$\frac{4}{13}$，则$p =$_______.

填空题（共6题，共30分）

11.（填空题）5分

当$x \to 0$时，$\int_0^x \frac{(1+t^2)\sin t^2}{1+\cos t^2}dt$与$x^k$是同阶无穷小，则$k =$_______.

12.（填空题）5分

$\int_2^{+\infty} \frac{5}{x^4+3x^2-4}dx =$ ________.

13.（填空题）5分

函数$f(x, y) = 2x^3 - 9x^2 - 6y^4 + 12x + 24y$的极值点是_________.

14.（填空题）5分

某产品的价格函数为$p = \begin{cases} 25 - 0.25Q, Q \le 20, \\ 35 - 0.75Q, Q > 20 \end{cases}$（$p$为单价，单位：万元；$Q$为产量，单位：件），总成本函数为$C = 150 + 5Q + 0.25Q^2$（万元），则经营该产品可获得的最大利润为_________（万元）.

15.（填空题）5分

设A为3阶矩阵，A^*为A的伴随矩阵，E为3阶单位矩阵.若$r(2E - A) = 1$，$r(E + A) = 2$，则$|A^*| =$________.

16.（填空题）5分

设随机试验每次成功的概率为p，现进行3次独立重复试验，在至少成功1次的条件下3次试验全部成功的概率为$\frac{4}{13}$，则$p =$_______.

解答题（共6题，共70分）

17. (解答题) 10分
设平面有界区域D位于第一象限，由曲线$xy=\frac{1}{3}, xy=3$与直线$y=\frac{1}{3}x$，$y=3x$围成，计算$\iint\limits_{D}(1+x-y)dxdy$.

18. (解答题) 12分
设函数$z=z(x,y)$由方程$z+e^{x}-y\ln(1+z^{2})=0$确定，求$\left(\frac{\partial^{2}z}{\partial x^{2}}+\frac{\partial^{2}z}{\partial y^{2}}\right)\Big|_{(0,0)}$.

19. (解答题) 12分
设$t>0$，平面有界区域D由曲线$y=xe^{-2x}$与直线$x=t$，$x=2t$及x轴围成，D的面积为$S(t)$，求$S(t)$的最大值.

20. (解答题) 12分
设函数$f(x)$具有2阶导数，且$f'(0)=f'(1)$，$|f''(x)|\leq 1$.证明:
(1) 当$x\in(0,1)$时，$|f(x)-f(0)(1-x)-f(1)x|\leq\frac{x(1-x)}{2}$;
(2) $\left|\int_{0}^{1}f(x)dx-\frac{f(0)+f(1)}{2}\right|\leq\frac{1}{12}$.

21. (解答题) 12分
设矩阵$\mathrm{A}=\begin{pmatrix}1&-1&0&-1\\1&1&0&3\\2&1&2&6\end{pmatrix}$，$\mathrm{B}=\begin{pmatrix}1&0&1&2\\1&-1&a&a-1\\2&-3&2&-2\end{pmatrix}$，向量
$\alpha=\begin{pmatrix}l0\\2\\3\end{pmatrix}$，$\beta=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$.
(1) 证明：方程组$\mathrm{Ax}=\alpha$的解均为方程组$\mathrm{Bx}=\beta$的解;
(2) 若方程组$\mathrm{Ax}=\alpha$与方程组$\mathrm{Bx}=\beta$不同解，求a的值.

22. (解答题) 12分
设总体X服从$[0,\theta]$上的均匀分布，其中$\theta\in(0,+\infty)$为未知参数.$X_{1},X_{2},\cdots,X_{n}$是来自总体X的简单随机样本，记$X_{(n)}=\max\{X_{1},X_{2},\cdots,X_{n}\}$，
$T_{c}=cX_{(n)}$.
(1) 求c，使得$E(T_{c})=\theta$;
(2) 记$h(c)=E(T_{c}-\theta)^{2}$，求c使得$h(c)$最小.

解答题 (共6题，共70分)

17. (解答题) 10分
设平面有界区域D位于第一象限，由曲线$xy=\frac{1}{3}, xy=3$与直线$y=\frac{1}{3}x$，$y=3x$围成，计算$\iint\limits_{D}(1+x-y)dxdy$.

18. (解答题) 12分
设函数$z=z(x,y)$由方程$z+e^{x}-y\ln(1+z^{2})=0$确定，求$\left(\frac{\partial^{2}z}{\partial x^{2}}+\frac{\partial^{2}z}{\partial y^{2}}\right)\Big|_{(0,0)}$.

19. (解答题) 12分

设$t>0$，平面有界区域D由曲线$y=xe^{-2x}$与直线$x=t$，$x=2t$及x轴围成，D的面积为$S(t)$，求$S(t)$的最大值.

20. (解答题) 12分
设函数$f(x)$具有2阶导数，且$f'(0)=f'(1)$，$|f''(x)|\leq 1$.证明:
(1) 当$x\in(0,1)$时，$|f(x)-f(0)(1-x)-f(1)x|\leq\frac{x(1-x)}{2}$;
(2) $\left|\int_0^1 f(x)dx-\frac{f(0)+f(1)}{2}\right|\leq\frac{1}{12}$.

21. (解答题) 12分
设矩阵$A=\begin{pmatrix}1&-1&0&-1\\1&1&0&3\\2&1&2&6\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1&0&1&2\\1&-1&a&a-1\\2&-3&2&-2\end{pmatrix}$，向量
$\alpha=\begin{pmatrix}l0\\2\\3\end{pmatrix}$，$\beta=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$.
(1) 证明：方程组$Ax=\alpha$的解均为方程组$Bx=\beta$的解;
(2) 若方程组$Ax=\alpha$与方程组$Bx=\beta$不同解，求a的值.

22. (解答题) 12分
设总体X服从$[0,\theta]$上的均匀分布，其中$\theta\in(0,+\infty)$为未知参数.$X_1,X_2,\cdots,X_n$是来自总体X的简单随机样本，记 $X_{(n)}=\max\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$，
$T_c=cX_{(n)}$.
(1) 求c，使得$E(T_c)=\theta$;
(2) 记$h(c)=E(T_c-\theta)^2$，求c使得$h(c)$最小.

答案与解析

答案与解析

选择题

1. (单选题)
[正确答案] D
[试题解析]:
$$f(x)=\begin{cases}x+1,|x|<1,\\0,其他\end{cases}$$
由于$\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=2$，$\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=0$,
所以$f(x)$在$x=1$处不连续.
$\lim\limits_{x\to -1^-}f(x)=0$，$\lim\limits_{x\to -1^+}f(x)=0$,
所以$\lim\limits_{x\to -1}f(x)=0=f(-1)$,
所以$f(x)$在$x=-1$处连续.

故选(D).

2. (单选题)
[正确答案] B
[试题解析]:
由于$|\sin x|$的周期是π,
所以
$$I=\int_a^{a+k\pi}|\sin x|\,\mathrm{d}x$$
$$=\int_0^{k\pi}|\sin x|\,\mathrm{d}x=k\int_0^{\pi}|\sin x|\,\mathrm{d}x=2k,$$
因此，该积分值只与k有关.
故选(B).

3. (单选题)
[正确答案] A
[试题解析]:
$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}dx\int_{\sin x}^{1}f(x,y)dy=\int_{\frac{1}{2}}^{1}dy\int_{\frac{\pi}{6}}^{\arcsin y}f(x,y)dx$，故选A.

4. (单选题)
[正确答案] A
[试题解析]:
$$\ln(2+x)=\ln 2+\ln\left(1+\tfrac{1}{2}x\right)$$
$$=\ln 2+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^n}{n}.$$
所以，$a_n=\begin{cases}\ln 2, & n=0\\ (-1)^{n-1}\frac{1}{n2^2}, & n\geq 1\end{cases}$
当$n\geq 1$，$a_{2n}=-\frac{1}{2n\cdot 2^{2n}}$.
所以，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}na_{2n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_{2n}$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot\left(-\frac{1}{2n\cdot 2^{2n}}\right)$$
$$=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{2n+1}}=-\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3}{1-\frac{1}{4}}=-\frac{1}{6},$$
故选(A).

5. (单选题)
[正确答案] C
[试题解析]:
由题可知，A的特征值为$1,-2,3$,
故$|A|=1\times(-2)\times 3=-6$，$tr(A)=1+(-2)+3=2$，故选C.

6. (单选题)
[正确答案] C
[试题解析]:
由$P^TAP^2=\begin{pmatrix}a+2c & 0 & c\\ 0 & b & 0\\ 2c & 0 & c\end{pmatrix}$,

则$A=(P^T)^{-1}\begin{pmatrix} a+2c & 0 & c \\ 0 & b & 0 \\ 2c & 0 & c \end{pmatrix}(P^2)^{-1}$

$=(P^{-1})^T\begin{pmatrix} a+2c & 0 & c \\ 0 & b & 0 \\ 2c & 0 & c \end{pmatrix}(P^{-1})^2$

$=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a+2c & 0 & c \\ 0 & b & 0 \\ 2c & 0 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^2$

$=\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$,

故选C.

7. (单选题)

[正确答案] B

[试题解析]:

由$-M_{21}+M_{22}-M_{23}=0$，得$A_{21}+A_{22}+A_{23}=0$.

而$A_{21}+A_{22}+A_{23}$

$=\begin{vmatrix} a+1 & b & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

$=\begin{vmatrix} 0 & b-a-1 & 2-a \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=a-b+1=0$,

于是$b=a+1$.

$|A|=\begin{vmatrix} a+1 & a+1 & 3 \\ a & \frac{a+1}{2} & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}=\frac{(1-a)(2a-1)}{2}=-\frac{1}{2}$,

得$a=0$或$a=\frac{3}{2}$.

故选(B).

8. (单选题)

[正确答案] B

[试题解析]:

$EX=\int_0^1 x\cdot 6x(1-x)dx=\frac{1}{2}$,

$E(X-EX)^3=\int_0^1 (x-EX)^3\cdot 6x(1-x)dx$

$=\int_0^1 (x-\frac{1}{2})^3\cdot 6x(1-x)dx=0$.

故选(B).

9. (单选题)

[正确答案] B

[试题解析]:

$Y-2X \sim N(-1,3^2)$,

则$p_1=\Phi(\frac{0+1}{3})=\Phi(\frac{1}{3})>\Phi(0)=\frac{1}{2}$.

$2Y-X \sim N(-2,\sqrt{6}^2)$,

则$p_2=\Phi(\frac{-1+2}{\sqrt{6}})=\Phi(\frac{\sqrt{6}}{6})>\Phi(0)=\frac{1}{2}$.

因为$\Phi(x)$单增，$\frac{\sqrt{6}}{6}>\frac{1}{3}$,所以$p_2>p_1>\frac{1}{2}$.

故选(B).

10. (单选题)
[正确答案] D
[试题解析]:

令$Z=|X-Y|$，则$F_Z(z)=P\{Z\le z\}=P\{|X-Y|\le z\}$.

当$z<0$时，$F_Z(z)=0$;

当$z\ge 0$时，

$F_Z(z)=\iint\limits_{|x-y|\le z} f(x,y)dxdy=\iint\limits_{|x-y|\le z} \lambda e^{-\lambda x}\lambda e^{-\lambda y}dxdy$

$=2\int_0^{+\infty}dy\int_y^{y+z}\lambda e^{-\lambda x}\lambda e^{-\lambda y}dx=1-e^{-\lambda z}$.

所以$F_Z(z)=\begin{cases} 0, & z<0 \\ 1-e^{-\lambda z}, & z\ge 0\end{cases}$.显然$Z=|X-Y|$与$X$同分布.

故选(D).

选择题

1. (单选题)
[正确答案] D
[试题解析]:

$f(x)=\begin{cases} x+1, |x|<1, \\ 0, 其他\end{cases}$

由于$\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=2$，$\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=0$,

所以$f(x)$在$x=1$处不连续.

$\lim\limits_{x\to -1^-}f(x)=0$，$\lim\limits_{x\to -1^+}f(x)=0$,

所以$\lim\limits_{x\to -1}f(x)=0=f(-1)$,

所以$f(x)$在$x=-1$处连续.

故选(D).

2. (单选题)
[正确答案] B
[试题解析]:

由于$|\sin x|$的周期是π,

所以

$I=\int_a^{a+k\pi}|\sin x|\,\mathrm{d}x$

$=\int_0^{k\pi}|\sin x|\,\mathrm{d}x=k\int_0^{\pi}|\sin x|\,\mathrm{d}x=2k$,

因此，该积分值只与k有关.

故选(B).

3. (单选题)

[正确答案] A

[试题解析]:

$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} dx \int_{\sin x}^{1} f(x,y)dy = \int_{\frac{1}{2}}^{1} dy \int_{\frac{\pi}{6}}^{\arcsin y} f(x,y)dx$，故选A.

4. (单选题)

[正确答案] A

[试题解析]:

$\ln(2+x) = \ln 2 + \ln\left(1+\frac{1}{2}x\right)$

$= \ln 2 + \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^n}{n}.$

所以，$a_n = \begin{cases} \ln 2, & n=0 \\ (-1)^{n-1}\frac{1}{n2^2}, & n \geq 1 \end{cases}$

当$n \geq 1$，$a_{2n} = -\frac{1}{2n \cdot 2^{2n}}$.

所以，$\sum\limits_{n=0}^{\infty} na_{2n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} na_{2n}$

$= \sum\limits_{n=1}^{\infty} n \cdot \left(-\frac{1}{2n \cdot 2^{2n}}\right)$

$= -\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{2n+1}} = -\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3}{1-\frac{1}{4}} = -\frac{1}{6}$,

故选(A).

5. (单选题)

[正确答案] C

[试题解析]:

由题可知，A的特征值为$1,-2,3$,

故$|A| = 1\times(-2)\times 3 = -6$，$tr(A) = 1+(-2)+3 = 2$，故选C.

6. (单选题)

[正确答案] C

[试题解析]:

由$P^TAP^2 = \begin{pmatrix} a+2c & 0 & c \\ 0 & b & 0 \\ 2c & 0 & c \end{pmatrix}$,

则$A = (P^T)^{-1}\begin{pmatrix} a+2c & 0 & c \\ 0 & b & 0 \\ 2c & 0 & c \end{pmatrix}(P^2)^{-1}$

$= (P^{-1})^T\begin{pmatrix} a+2c & 0 & c \\ 0 & b & 0 \\ 2c & 0 & c \end{pmatrix}(P^{-1})^2$

$$=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a+2c&0&c\\0&b&0\\2c&0&c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-1&0&1\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}a&0&0\\0&b&0\\0&0&c\end{pmatrix},$$

故选C.

7. (单选题)
[正确答案] B
[试题解析]:

由$-M_{21}+M_{22}-M_{23}=0$，得$A_{21}+A_{22}+A_{23}=0$.

而$A_{21}+A_{22}+A_{23}$
$$=\begin{vmatrix}a+1&b&3\\1&1&1\\1&1&2\end{vmatrix}$$
$$=\begin{vmatrix}0&b-a-1&2-a\\1&1&1\\0&0&1\end{vmatrix}=a-b+1=0,$$

于是$b=a+1$.

$$|A|=\begin{vmatrix}a+1&a+1&3\\a&\frac{a+1}{2}&1\\1&1&2\end{vmatrix}=\frac{(1-a)(2a-1)}{2}=-\frac{1}{2},$$

得$a=0$或$a=\frac{3}{2}$.

故选(B).

8. (单选题)
[正确答案] B
[试题解析]:

$EX=\int_0^1 x\cdot 6x(1-x)dx=\frac{1}{2}$,

$E(X-EX)^3=\int_0^1 (x-EX)^3\cdot 6x(1-x)dx$

$=\int_0^1 (x-\frac{1}{2})^3\cdot 6x(1-x)dx=0$.

故选(B).

9. (单选题)
[正确答案] B
[试题解析]:

$Y-2X\sim N(-1,3^2)$,

则$p_1=\Phi(\frac{0+1}{3})=\Phi(\frac{1}{3})>\Phi(0)=\frac{1}{2}$.

$2Y-X\sim N(-2,\sqrt{6}^2)$,

则$p_2=\Phi(\frac{-1+2}{\sqrt{6}})=\Phi(\frac{\sqrt{6}}{6})>\Phi(0)=\frac{1}{2}$.

因为$\Phi(x)$单增，$\frac{\sqrt{6}}{6}>\frac{1}{3}$,所以$p_2>p_1>\frac{1}{2}$.

故选(B).

10. (单选题)
[正确答案] D
[试题解析]:
令$Z=|X-Y|$，则$F_Z(z)=P\{Z\le z\}=P\{|X-Y|\le z\}$.
当$z<0$时，$F_Z(z)=0$;
当$z\ge 0$时，
$F_Z(z)=\iint\limits_{|x-y|\le z} f(x,y)dxdy=\iint\limits_{|x-y|\le z}\lambda e^{-\lambda x}\lambda e^{-\lambda y}dxdy$
$=2\int_0^{+\infty}dy\int_y^{y+z}\lambda e^{-\lambda x}\lambda e^{-\lambda y}dx=1-e^{-\lambda z}$.
所以$F_Z(z)=\begin{cases}0, & z<0\\ 1-e^{-\lambda z}, & z\ge 0\end{cases}$.显然$Z=|X-Y|$与$X$同分布.
故选(D).

填空题

11. (填空题)
令$f(x)=\int_0^x\frac{(1+t^2)\sin t^2}{1+\cos t^2}dt$，则$f'(x)=\frac{(1+x^2)\sin x^2}{1+\cos^2 x}\sim\frac{x^2}{2}$,
所以$f(x)\sim\frac{x^3}{6}$，则$k=3$.
12. (填空题)
令$f(x)=\frac{5}{x^4+3x^2-4}=\frac{5}{(x^2+4)(x^2-1)}$
$=\frac{5}{(x-1)(x+1)(x^2+4)}$
$=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{Cx+D}{x^2+4}$
$=\frac{A(x+1)(x^2+4)+B(x-1)(x^2+4)+(Cx+D)(x^2-1)}{(x-1)(x+1)(x^2+4)}$
$=\frac{(A+B+C)x^3+(A-B+D)x^2+(4A+4B-C)x+(4A-4B-D)}{(x-1)(x+1)(x^2+4)}$
$\therefore\begin{cases}A+B+C=0\\ A-B+D=0\\ 4A+4B-C=0\\ 4A-4B-D=5\end{cases}\therefore\begin{cases}A=\frac{1}{2}\\ B=-\frac{1}{2}\\ C=0\\ D=-1\end{cases}$
$\therefore f(x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x-1}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x^2+4}$
$\therefore I=\int_2^{+\infty}\frac{5}{x^4+3x^2-4}dx$
$=\frac{1}{2}\int_2^{+\infty}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)dx-\int_2^{+\infty}\frac{1}{x^2+4}dx$
$=\frac{1}{2}\ln\frac{x-1}{x+1}\Big|_2^{+\infty}-\frac{1}{2}\arctan\frac{x}{2}\Big|_2^{+\infty}$
$=0-\frac{1}{2}\times\ln\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}\ln 3-\frac{1}{8}\pi$.
13. (填空题)
由$\begin{cases}f'_x(x,y)=6x^2-18x+12=0\\ f'_y(x,y)=-24y^3+24=0\end{cases}$
得：驻点$(1,1)$和$(2,1)$
$f''_{xx}(x,y)=12x-18$，$f''_{yy}(x,y)=-72y^2$，$f''_{xy}(x,y)=0$.

1)对于驻点$(1,1)$：$A=-6$，$B=0$，$C=-72$，
由$AC-B^2>0$且$A<0$可知，驻点$(1,1)$是$f(x,y)$的极小值点.
2)对于驻点$(2,1)$：$A=6$，$B=0$，$C=-72$，
由$AC-B^2<0$可知，驻点$(2,1)$不是$f(x,y)$的极值点.
故$f(x,y)$的极值点是$(1,1)$.

14. (填空题)
$L(Q)=R-C=PQ-C$
$=\begin{cases}-0.5Q^2+20Q-150, Q\leq 20\\ -Q^2+30Q-150, Q>20\end{cases}$，
$L'(Q)=\begin{cases}-Q+20, Q<20\\ -2Q+30, Q>20\end{cases}$，
$L'_+(20)=-10, L'_-(20)=0,$
则$Q=20$为$L(Q)$的不可导点.
$Q<20$时，$L'(Q)>0$；$Q>20$时，$L'(Q)<-10<0$，
则$Q=20$为唯一极大值点，也是最大值点.
$L(20)=50$ ，所以最大利润为50.

15. (填空题)
$r(2E-A)=1$，故$\lambda=2$至少为A的二重特征值.
由$r(E+A)=2$，故$\lambda=-1$至少为A的一重特征值，
故A的特征值为u$\lambda_1=\lambda_2=2,\lambda_3=-1$，则$|A|=-4$，
$|A^*|=|A|^2=16$.

16. (填空题)
设随机变量X表示三次试验中成功的次数，则$X\sim B(3,p)$.
所以$P\{X=3|X\geq 1\}=\frac{P\{X=3,X\geq 1\}}{P\{X\geq 1\}}=\frac{P\{X=3\}}{P\{X\geq 1\}}$
$=\frac{C_3^3p^3}{1-C_3^0(1-p)^3}=\frac{4}{13}$，
故$p=\frac{2}{3}$.

填空题

11. (填空题)
令$f(x)=\int_0^x\frac{(1+t^2)\sin t^2}{1+\cos t^2}dt$，则$f'(x)=\frac{(1+x^2)\sin x^2}{1+\cos^2 x}\sim\frac{x^2}{2}$，
所以$f(x)\sim\frac{x^3}{6}$ ，则$k=3$.

12. (填空题)
令$f(x)=\frac{5}{x^4+3x^2-4}=\frac{5}{(x^2+4)(x^2-1)}$
$=\frac{5}{(x-1)(x+1)(x^2+4)}$
$=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{Cx+D}{x^2+4}$
$=\frac{A(x+1)(x^2+4)+B(x-1)(x^2+4)+(Cx+D)(x^2-1)}{}$

$-$

$(x-1)(x+1)(x^2+4)$

$$=\frac{(A+B+C)x^3+(A-B+D)x^2+(4A+4B-C)x+(4A-4B-D)}{(x-1)(x+1)(x^2+4)}$$

$$\therefore\begin{cases}A+B+C=0\\A-B+D=0\\4A+4B-C=0\\4A-4B-D=5\end{cases}\therefore\begin{cases}A=\frac{1}{2}\\B=-\frac{1}{2}\\C=0\\D=-1\end{cases}$$

$$\therefore f(x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x-1}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x^2+4}$$

$$\therefore I=\int_2^{+\infty}\frac{5}{x^4+3x^2-4}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_2^{+\infty}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)dx-\int_2^{+\infty}\frac{1}{x^2+4}dx$$

$$=\frac{1}{2}\ln\frac{x-1}{x+1}\Big|_2^{+\infty}-\frac{1}{2}\arctan\frac{x}{2}\Big|_2^{+\infty}$$

$$=0-\frac{1}{2}\times\ln\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}\ln 3-\frac{1}{8}\pi.$$

13. (填空题)

由$\begin{cases}f'_x(x,y)=6x^2-18x+12=0\\f'_y(x,y)=-24y^3+24=0\end{cases}$

得：驻点$(1,1)$和$(2,1)$

$f''_{xx}(x,y)=12x-18$，$f''_{yy}(x,y)=-72y^2$，$f''_{xy}(x,y)=0$.

1)对于驻点$(1,1)$：$A=-6$，$B=0$，$C=-72$，

由$AC-B^2>0$且$A<0$可知，驻点$(1,1)$是$f(x,y)$的极小值点.

2)对于驻点$(2,1)$：$A=6$，$B=0$，$C=-72$，

由$AC-B^2<0$可知，驻点$(2,1)$不是$f(x,y)$的极值点.

故$f(x,y)$的极值点是$(1,1)$.

14. (填空题)

$L(Q)=R-C=PQ-C$

$=\begin{cases}-0.5Q^2+20Q-150,Q\le 20\\-Q^2+30Q-150,Q>20\end{cases}$，

$L'(Q)=\begin{cases}-Q+20,Q<20\\-2Q+30,Q>20\end{cases}$，

$L'_+(20)=-10,L'_-(20)=0$,

则$Q=20$为$L(Q)$的不可导点.

$Q<20$时，$L'(Q)>0$；$Q>20$时，$L'(Q)<-10<0$，

则$Q=20$为唯一极大值点，也是最大值点.

$L(20)=50$，所以最大利润为50.

15. (填空题)

$r(2E-A)=1$，故$\lambda=2$至少为A的二重特征值.

由$r(E+A)=2$，故$\lambda=-1$至少为A的一重特征值，

故A的特征值为u$\lambda_1=\lambda_2=2,\lambda_3=-1$，则$|A|=-4$,

$|A^*|=|A|^2=16$.

16. (填空题)

设随机变量X表示三次试验中成功的次数，则$X\sim B(3,p)$.

所以$P\{X=3|X\geq 1\}=\frac{P\{X=3,X\geq 1\}}{P\{X\geq 1\}}=\frac{P\{X=3\}}{P\{X\geq 1\}}$
$=\frac{C_3^3p^3}{1-C_3^0(1-p)^3}=\frac{4}{13}$,
故$p=\frac{2}{3}$.

解答题

17. (解答题)

积分区域D关于$y=x$对称，由轮换对称性可得，

$\iint\limits_D(1+x-y)dxdy=\iint\limits_D(1+y-x)dxdy$,

故

$\iint\limits_D(1+x-y)dxdy$

$=\frac{1}{2}(\iint\limits_D(1+x-y)dxdy+\iint\limits_D(1+y-x)dxdy)$

$=\iint\limits_D 1dxdy$

$=\int_{\frac{1}{3}}^{1}(3x-\frac{1}{3x})dx+\int_1^3(\frac{3}{x}-\frac{x}{3})dx$

$=\frac{4}{3}-\frac{1}{3}\ln 3+3\ln 3-\frac{4}{3}=\frac{8}{3}\ln 3.$

18. (解答题)

将$(x,y)=(0,0)$代入原方程得$z(0,0)=-1$;

原方程对x求偏导，得：$z'_x+e^x-y\cdot\frac{2zz'_x}{1+z^2}=0$① ，

从而$z'_x(0,0)=-1$;

①式对x求偏导，得：$z''_{xx}+e^x-y\cdot\frac{\partial\left(\frac{2zz'_x}{1+z^2}\right)}{\partial x}=0$,

从而$z''_{xx}(0,0)=-1$;

原方程对y求偏导，得：$z'_y-\ln(1+z^2)-y\cdot\frac{2zz'_y}{1+z^2}=0$②,

从而$z'_y(0,0)=\ln 2$;

②式对y求偏导得$z''_{yy}-\frac{2zz'_y}{1+z^2}-\frac{2zz'_y}{1+z^2}-y\cdot\frac{\partial\left(\frac{2zz'_y}{1+z^2}\right)}{\partial y}=0$,

从而$z''_{yy}(0,0)=-2\ln 2$;

综上,$\left(\frac{\partial^2z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2z}{\partial y^2}\right)\Big|_{(0,0)}=-1-2\ln 2.$

19. (解答题)

$S(t)=\int_t^{2t}xe^{-2x}dx=-\frac{1}{2}\left[(2t+\frac{1}{2})e^{-4t}-(t+\frac{1}{2})e^{-2t}\right]$

则$S'(t)=-te^{-2t}(1-4e^{-2t})$，令$S'(t)=0\Rightarrow t=\ln 2$,

$\because t\in(\ln 2-\delta,\ln 2)$有$S'(t)>0$，$t\in(\ln 2,\ln 2+\delta)$有

$S'(t)<0$,

$\therefore t=\ln 2$为$S(t)$的唯一的极大值点，也是最大值点，

故最大值为$S(\ln 2)=\frac{1}{16}(\ln 2+\frac{3}{4})$.

20. (解答题)

(1)因$\left|f''(x)\right| \le 1$,则$-1 \le f''(x) \le 1$.

令$F(x) = f(x) - f(0)(1-x) - f(1)x - \frac{x(1-x)}{2}, x \in (0,1)$.

$F(0) = 0, F(1) = 0, F''(x) = f''(x) + 1 \ge 0$,

则$F(x)$为凹函数，所以$F(x) \le 0$.

故$f(x) - f(0)(1-x) - f(1)x \le \frac{x(1-x)}{2}$①.

令$G(x) = f(x) - f(0)(1-x) - f(1)x + \frac{x(1-x)}{2}, x \in (0,1)$

$G(0) = 0, G(1) = 0$，$G''(x) = f''(x) - 1 \le 0$,

则$G(x)$为凸函数，所以$G(x) \ge 0$.

故$f(x) - f(0)(1-x) - f(1)x \ge -\frac{x(1-x)}{2}$②.

综上①②,得：$\left|f(x) - f(0)(1-x) - f(1)x\right| \le \frac{x(1-x)}{2}$,
$x \in (0,1)$.

(2) 由①知，$f(x) - f(0)(1-x) - f(1)x \le \frac{x(1-x)}{2}$，$x \in (0,1)$.

$\Rightarrow \int_0^1 [f(x) - f(0)(1-x) - f(1)x]dx \le \int_0^1 \frac{x(1-x)}{2}dx$,

$\Rightarrow \int_0^1 f(x)dx - \frac{f(0)+f(1)}{2} \le \frac{1}{12}$.③

由②知，$f(x) - f(0)(1-x) - f(1)x \ge -\frac{x(1-x)}{2}$，$x \in (0,1)$.

$\Rightarrow \int_0^1 [f(x) - f(0)(1-x) - f(1)x]dx \ge \int_0^1 -\frac{x(1-x)}{2}dx$,

$\Rightarrow \int_0^1 f(x)dx - \frac{f(0)+f(1)}{2} \ge -\frac{1}{12}$.④

综上③④：$\left|\int_0^1 f(x)dx - \frac{f(0)+f(1)}{2}\right| \le \frac{1}{12}$.

21. (解答题)

(1)证明：

由于$\begin{pmatrix} A & \alpha \\ B & \beta \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 6 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & a & a-1 & 0 \\ 2 & -3 & 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

则$r\begin{pmatrix} A & \alpha \\ B & \beta \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} A & \alpha \end{pmatrix}$，故$\begin{cases} Ax = \alpha \\ Bx = \beta \end{cases}$与$Ax = \alpha$同解，

所以$Ax = \alpha$的解均为$Bx = \beta$的解.

(2)由于$Ax = \alpha$的解均为$Bx = \beta$的解，

若$Ax = \alpha$与$Bx = \beta$同解，则与题意矛盾，故$Ax = \alpha$的解是$Bx = \beta$解的真子集，故$Ax = 0$基础解系中解向量的个数小于$Bx = 0$基础解系中解向量的个数，则$3 - r(A) < 3 - r(B)$，故$r(A) > r(B)$.

$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

又$r(A)=3$，故$r(B)<3$，则 $\begin{vmatrix} 1 & -1 & a \\ 2 & -3 & 2 \end{vmatrix}=0$，得$a=1$.

22. (解答题)

(1)X的概率密度为$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{\theta}, 0<x<\theta \\ 0, 其他 \end{cases}$,

X的分布函数为$F(x)=\begin{cases} 0, x<0 \\ \frac{1}{\theta}x, 0\le x<\theta \\ 1, x\ge\theta \end{cases}$.

$X_{(n)}$的分布函数为:

$F_{X_{(n)}}(x)=P\{\max\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}\le x\}$

$=P\{X_1\le x,X_2\le x,\cdots,X_n\le x\}$

$=P\{X_1\le x\}\cdot P\{X_2\le x\}\cdot\cdots\cdot P\{X_n\le x\}=F^n(x)$,

$X_{(n)}$概率密度为

$f_{X_{(n)}}(x)=nF^{n-1}(x)\cdot f(x)$

$=\begin{cases} \frac{n}{\theta^n}x^{n-1}, 0<x<\theta \\ 0, 其他 \end{cases}$.

$E(T_c)=cE(X_{(n)})=c\int_0^\theta x\cdot\frac{n}{\theta^n}x^{n-1}dx=\frac{cn}{n+1}\theta$.

令$E(T_c)=\frac{cn}{n+1}\theta=\theta$，得$c=\frac{n+1}{n}$.

(2) $E(T_c^2)=c^2E(X_{(n)}^2)=c^2\int_0^\theta x^2\cdot\frac{n}{\theta^n}x^{n-1}dx=\frac{c^2n}{n+2}\theta^2$.

又$h(c)=E(T_c-\theta)^2$

$=E(T_c^2-2\theta T_c+\theta^2)$

$=E(T_c^2)-2\theta E(T_c)+\theta^2$

$=\frac{c^2n}{n+2}\theta^2-\frac{2cn}{n+1}\theta^2+\theta^2$.

$h'(c)=\frac{2cn}{n+2}\theta^2-\frac{2n}{n+1}\theta^2$,

令$h'(c)=0$得$c=\frac{n+2}{n+1}$.

$h''(c)=\frac{2n}{n+2}\theta^2>0$,

所以当$c=\frac{n+2}{n+1}$时，$h(c)$最小.

选择题（共10题，共50分）

1. (单选题) 5分
设函数$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+x}{1+nx^{2n}}$，则$f(x)$( )

A.在$x=1$，$x=-1$处都连续B.在$x=1$处连续，$x=-1$处不连续

C.在$x=1$，$x=-1$处都不连续D.在$x=1$处不连续，$x=-1$处连续

2. (单选题) 5分
设$I=\int_a^{a+k\pi}|\sin x|dx$,$k$为整数,则$I$的值( )

A.只与a有关B.只与k有关C.与a，k均有关D.与a，k均无关

3. (单选题) 5分
设$f(x,y)$是连续函数，则$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}dx\int_{\sin x}^{1}f(x,y)dy=$( )

A.$\int_{\frac{1}{2}}^{1}dy\int_{\frac{\pi}{6}}^{\arcsin y}f(x,y)dx$B.$\int_{\frac{1}{2}}^{1}dy\int_{\arcsin y}^{\frac{\pi}{2}}f(x,y)dx$

C. $\int_0^{\frac{1}{2}}dy\int_{\frac{\pi}{6}}^{\arcsin y}f(x,y)dx$D.$\int_0^{\frac{1}{2}}dy\int_{\arcsin y}^{\frac{\pi}{2}}f(x,y)dx$

4. (单选题) 5分
设幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$的和函数为$\ln(2+x)$，则$\sum\limits_{n=0}^{\infty}na_{2n}=$( )

A.$-\frac{1}{6}$B.$-\frac{1}{3}$C.$\frac{1}{6}$D.$\frac{1}{3}$

5. (单选题) 5分
设二次型$f(x_1,x_2,x_3)=x^TAx$在正交变换下可化成 $y_1^2-2y_2^2+3y_3^2$，则二次型f的矩阵A的行列式与迹分别为( )

A. - 6， - 2B.6， - 2C. - 6，2D.6，2

6. (单选题) 5分

设A为3阶矩阵，$P=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$.若$P^TAP^2=\begin{pmatrix}a+2c&0&c\\0&b&0\\2c&0&c\end{pmatrix}$，则$A$=( )

A. $\begin{pmatrix}c&0&0\\0&a&0\\0&0&b\end{pmatrix}$B. $\begin{pmatrix}b&0&0\\0&c&0\\0&0&a\end{pmatrix}$C. $\begin{pmatrix}a&0&0\\0&b&0\\0&0&c\end{pmatrix}$D. $\begin{pmatrix}c&0&0\\0&b&0\\0&0&a\end{pmatrix}$

7. (单选题) 5分

设矩阵$A=\begin{pmatrix}a+1&b&3\\a&\frac{b}{2}&1\\1&1&2\end{pmatrix}$，$M_{ij}$表示$A$的$i$行$j$列元素的余子式.若$|A|=-\frac{1}{2}$，且$-M_{21}+M_{22}-M_{23}=0$，则( )

A.$a=0$或$a=-\frac{3}{2}$B.$a=0$或$a=\frac{3}{2}$C. $b=1$或$b=-\frac{1}{2}$D. $b=-1$或$b=\frac{1}{2}$

8. (单选题) 5分

设随机变量X的概率密度为$f(x)=\begin{cases}6x(1-x),0<x<1\\0，其他\end{cases}$，则$X$的三阶中心距

$E(X-EX)^3=(\ )$

A. $-\frac{1}{32}$B.0C. $\frac{1}{16}$D. $\frac{1}{2}$

9. (单选题) 5分

随机变量X，Y相互独立，其$X\sim N(0,2)$,$Y\sim N(-1,1)$，记$p_1=P\{2X>Y\}$，$p_2=P\{X-2Y>1\}$，则( )

A.$p_1>p_2>\frac{1}{2}$B.$p_2>p_1>\frac{1}{2}$C. $p_1<p_2<\frac{1}{2}$D.$p_2<p_1<\frac{1}{2}$

10. (单选题) 5分

设随机变量X，Y相互独立，且均服从参数为λ的指数分布，令$Z=|X-Y|$，则下列随机变量中与Z同分布的是( )

A.$X+Y$B.$\frac{X+Y}{2}$C. $2X$D.X

选择题 (共10题，共50分)

1. (单选题) 5分

设函数$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+x}{1+nx^{2n}}$，则$f(x)$( )

A.在$x=1$，$x=-1$处都连续B.在$x=1$处连续，$x=-1$处不连续

C.在$x=1$，$x=-1$处都不连续D.在$x=1$处不连续，$x=-1$处连续

2. (单选题) 5分

设$I=\int_a^{a+k\pi}|\sin x|dx$,$k$为整数,则$I$的值( )

A.只与a有关B.只与k有关C.与a，k均有关D.与a，k均无关

3. (单选题) 5分

设$f(x,y)$是连续函数，则$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}dx\int_{\sin x}^{1}f(x,y)dy=(\ )$

A.$\int_{\frac{1}{2}}^{1}dy\int_{\frac{\pi}{6}}^{\arcsin y}f(x,y)dx$B.$\int_{\frac{1}{2}}^{1}dy\int_{\arcsin y}^{\frac{\pi}{2}}f(x,y)dx$

C. $\int_0^{\frac{1}{2}}dy\int_{\frac{\pi}{6}}^{\arcsin y}f(x,y)dx$D.$\int_0^{\frac{1}{2}}dy\int_{\arcsin y}^{\frac{\pi}{2}}f(x,y)dx$

4. (单选题) 5分

设幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$的和函数为$\ln(2+x)$，则$\sum\limits_{n=0}^{\infty}na_{2n}=(\ )$

A. $-\frac{1}{6}$ B. $-\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{6}$ D. $\frac{1}{3}$

5. (单选题) 5分

设二次型$f\left(x_1,x_2,x_3\right)=x^TAx$在正交变换下可化成 $y_1^2-2y_2^2+3y_3^2$，则二次型f的矩阵A的行列式与迹分别为( )

A. - 6， - 2B. 6， - 2C. - 6，2D. 6，2

6. (单选题) 5分

设A为3阶矩阵，$P=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$.若$P^TAP^2=\begin{pmatrix}a+2c&0&c\\0&b&0\\2c&0&c\end{pmatrix}$，则$A$=( )

A. $\begin{pmatrix}c&0&0\\0&a&0\\0&0&b\end{pmatrix}$ B. $\begin{pmatrix}b&0&0\\0&c&0\\0&0&a\end{pmatrix}$ C. $\begin{pmatrix}a&0&0\\0&b&0\\0&0&c\end{pmatrix}$ D. $\begin{pmatrix}c&0&0\\0&b&0\\0&0&a\end{pmatrix}$

7. (单选题) 5分

设矩阵$A=\begin{pmatrix}a+1&b&3\\a&\frac{b}{2}&1\\1&1&2\end{pmatrix}$，$M_{ij}$表示$A$的$i$行$j$列元素的余子式.若$|A|=-\frac{1}{2}$，且$-M_{21}+M_{22}-M_{23}=0$，则( )

A. $a=0$或$a=-\frac{3}{2}$ B. $a=0$或$a=\frac{3}{2}$ C. $b=1$或$b=-\frac{1}{2}$ D. $b=-1$或$b=\frac{1}{2}$

8. (单选题) 5分

设随机变量X的概率密度为$f(x)=\begin{cases}6x(1-x),0<x<1\\0，其他\end{cases}$，则$X$的三阶中心距$E(X-EX)^3$=( )

A. $-\frac{1}{32}$ B. 0 C. $\frac{1}{16}$ D. $\frac{1}{2}$

9. (单选题) 5分

随机变量X，Y相互独立，其$X\sim N(0,2)$,$Y\sim N(-1,1)$，记
$p_1=P\{2X>Y\}$，$p_2=P\{X-2Y>1\}$，则( )

A. $p_1>p_2>\frac{1}{2}$ B. $p_2>p_1>\frac{1}{2}$ C. $p_1<p_2<\frac{1}{2}$ D. $p_2<p_1<\frac{1}{2}$

10. (单选题) 5分

设随机变量X，Y相互独立，且均服从参数为λ的指数分布，令$Z=|X-Y|$，则下列随机变量中与Z同分布的是( )

A. $X+Y$ B. $\frac{X+Y}{2}$ C. $2X$ D. X

填空题（共6题，共30分）

11. (填空题) 5分

当$x \to 0$时，$\int_0^x \frac{(1+t^2)\sin t^2}{1+\cos t^2}dt$与$x^k$是同阶无穷小，则$k =$_______.

12. (填空题) 5分

$\int_2^{+\infty} \frac{5}{x^4+3x^2-4}dx =$ ________.

13. (填空题) 5分

函数$f(x,y) = 2x^3 - 9x^2 - 6y^4 + 12x + 24y$的极值点是_________.

14. (填空题) 5分

某产品的价格函数为$p = \begin{cases} 25 - 0.25Q, Q \leq 20, \\ 35 - 0.75Q, Q > 20 \end{cases}$($p$为单价，单位：万元；$Q$为产量，单位：件)，总成本函数为$C = 150 + 5Q + 0.25Q^2$(万元)，则经营该产品可获得的最大利润为_________(万元).

15. (填空题) 5分

设A为3阶矩阵,A^*为A的伴随矩阵，E为3阶单位矩阵.若$r(2E - A) = 1$，$r(E + A) = 2$，则$|A^*| =$________.

16. (填空题) 5分

设随机试验每次成功的概率为p，现进行3次独立重复试验，在至少成功1次的条件下3次试验全部成功的概率为$\frac{4}{13}$，则$p =$_______.

填空题（共6题，共30分）

11. (填空题) 5分

当$x \to 0$时，$\int_0^x \frac{(1+t^2)\sin t^2}{1+\cos t^2}dt$与$x^k$是同阶无穷小，则$k =$_______.

12. (填空题) 5分

$\int_2^{+\infty} \frac{5}{x^4+3x^2-4}dx =$ ________.

13. (填空题) 5分

函数$f(x,y) = 2x^3 - 9x^2 - 6y^4 + 12x + 24y$的极值点是_________.

14. (填空题) 5分

某产品的价格函数为$p = \begin{cases} 25 - 0.25Q, Q \leq 20, \\ 35 - 0.75Q, Q > 20 \end{cases}$($p$为单价，单位：万元；$Q$为产量，单位：件)，总成本函数为$C = 150 + 5Q + 0.25Q^2$(万元)，则经营该产品可获得的最大利润为_________(万元).

15. (填空题) 5分

设A为3阶矩阵,A^*为A的伴随矩阵，E为3阶单位矩阵.若$r(2E - A) = 1$，$r(E + A) = 2$，则$|A^*| =$________.

16. (填空题) 5分

设随机试验每次成功的概率为p，现进行3次独立重复试验，在至少成功1次的条件下3次试验全部成功的概率为$\frac{4}{13}$，则$p =$_______.

解答题（共6题，共70分）

17. (解答题) 10分
设平面有界区域D位于第一象限，由曲线$xy=\frac{1}{3}$,$xy=3$与直线$y=\frac{1}{3}x$，$y=3x$围成，计算$\iint\limits_{D}(1+x-y)dxdy$.

18. (解答题) 12分
设函数$z=z(x,y)$由方程$z+e^{x}-y\ln(1+z^{2})=0$确定，求$\left(\frac{\partial^{2}z}{\partial x^{2}}+\frac{\partial^{2}z}{\partial y^{2}}\right)\Big|_{(0,0)}$.

19. (解答题) 12分
设$t>0$，平面有界区域D由曲线$y=xe^{-2x}$与直线$x=t$，$x=2t$及x轴围成，D的面积为$S(t)$，求$S(t)$的最大值.

20. (解答题) 12分
设函数$f(x)$具有2阶导数，且$f'(0)=f'(1)$，$|f''(x)|\le 1$.证明:
(1) 当$x\in(0,1)$时，$|f(x)-f(0)(1-x)-f(1)x|\le\frac{x(1-x)}{2}$;
(2) $\left|\int_{0}^{1}f(x)dx-\frac{f(0)+f(1)}{2}\right|\le\frac{1}{12}$.

21. (解答题) 12分
设矩阵$\mathrm{A}=\begin{pmatrix}1&-1&0&-1\\1&1&0&3\\2&1&2&6\end{pmatrix}$，$\mathrm{B}=\begin{pmatrix}1&0&1&2\\1&-1&a&a-1\\2&-3&2&-2\end{pmatrix}$，向量
$\alpha=\begin{pmatrix}l0\\2\\3\end{pmatrix}$，$\beta=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$.
(1) 证明：方程组$\mathrm{Ax}=\alpha$的解均为方程组$\mathrm{Bx}=\beta$的解；
(2) 若方程组$\mathrm{Ax}=\alpha$与方程组$\mathrm{Bx}=\beta$不同解，求a的值.

22. (解答题) 12分
设总体X服从$[0,\theta]$上的均匀分布，其中$\theta\in(0,+\infty)$为未知参数.$X_{1},X_{2},\cdots,X_{n}$是来自总体X的简单随机样本，记 $X_{(n)}=\max\{X_{1},X_{2},\cdots,X_{n}\}$，
$T_{c}=cX_{(n)}$.
(1) 求c，使得$E(T_{c})=\theta$;
(2) 记$h(c)=E(T_{c}-\theta)^{2}$，求c使得$h(c)$最小.

解答题（共6题，共70分）

17. (解答题) 10分
设平面有界区域D位于第一象限，由曲线$xy=\frac{1}{3}$,$xy=3$与直线$y=\frac{1}{3}x$，$y=3x$围成，计算$\iint\limits_{D}(1+x-y)dxdy$.

18. (解答题) 12分
设函数$z=z(x,y)$由方程$z+e^{x}-y\ln(1+z^{2})=0$确定，求$\left(\frac{\partial^{2}z}{\partial x^{2}}+\frac{\partial^{2}z}{\partial y^{2}}\right)\Big|_{(0,0)}$.

19. (解答题) 12分

设$t > 0$，平面有界区域D由曲线$y = xe^{-2x}$与直线$x = t$，$x = 2t$及x轴围成，D的面积为$S(t)$，求$S(t)$的最大值.

20. (解答题) 12分

设函数$f(x)$具有2阶导数，且$f'(0) = f'(1)$，$|f''(x)| \leq 1$.证明：

(1) 当$x \in (0,1)$时，$|f(x) - f(0)(1 - x) - f(1)x| \leq \frac{x(1-x)}{2}$；

(2) $\left|\int_0^1 f(x)dx - \frac{f(0)+f(1)}{2}\right| \leq \frac{1}{12}$.

21. (解答题) 12分

设矩阵$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & a & a-1 \\ 2 & -3 & 2 & -2 \end{pmatrix}$，向量

$\alpha = \begin{pmatrix} l0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$，$\beta = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

(1) 证明：方程组$Ax = \alpha$的解均为方程组$Bx = \beta$的解；

(2) 若方程组$Ax = \alpha$与方程组$Bx = \beta$不同解，求a的值.

22. (解答题) 12分

设总体X服从$[0,\theta]$上的均匀分布，其中$\theta \in (0, +\infty)$为未知参数.$X_1, X_2, \cdots, X_n$是来自总体X的简单随机样本，记 $X_{(n)} = \max\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$，$T_c = cX_{(n)}$.

(1) 求c，使得$E(T_c) = \theta$；

(2) 记$h(c) = E(T_c - \theta)^2$，求c使得$h(c)$最小.

答案与解析

答案与解析

选择题

1. (单选题)

[正确答案] D

[试题解析]:

$$f(x) = \begin{cases} x+1, |x| < 1, \\ 0, 其他 \end{cases}$$

由于$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 2$，$\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 0$，

所以$f(x)$在$x = 1$处不连续.

$\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = 0$，$\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = 0$，

所以$\lim\limits_{x \to -1} f(x) = 0 = f(-1)$，

所以$f(x)$在$x = -1$处连续.

故选(D).

2. (单选题)
[正确答案] B
[试题解析]:
由于$|\sin x|$的周期是π,
所以
$$I=\int_a^{a+k\pi}|\sin x|\,\mathrm{d}x$$
$$=\int_0^{k\pi}|\sin x|\,\mathrm{d}x=k\int_0^{\pi}|\sin x|\,\mathrm{d}x=2k,$$
因此，该积分值只与k有关.
故选(B).

3. (单选题)
[正确答案] A
[试题解析]:
$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}dx\int_{\sin x}^{1}f(x,y)dy=\int_{\frac{1}{2}}^{1}dy\int_{\frac{\pi}{6}}^{\arcsin y}f(x,y)dx$，故选A.

4. (单选题)
[正确答案] A
[试题解析]:
$$\ln(2+x)=\ln 2+\ln\left(1+\frac{1}{2}x\right)$$
$$=\ln 2+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^n}{n}.$$
所以，$a_n=\begin{cases}\ln 2, & n=0\\ (-1)^{n-1}\frac{1}{n2^2}, & n\geq 1\end{cases}$
当$n\geq 1$，$a_{2n}=-\frac{1}{2n\cdot 2^{2n}}$.
所以，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}na_{2n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_{2n}$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot\left(-\frac{1}{2n\cdot 2^{2n}}\right)$$
$$=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{2n+1}}=-\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3}{1-\frac{1}{4}}=-\frac{1}{6},$$
故选(A).

5. (单选题)
[正确答案] C
[试题解析]:
由题可知，A的特征值为$1,-2,3$,
故$|A|=1\times(-2)\times 3=-6$，$tr(A)=1+(-2)+3=2$，故选C.

6. (单选题)
[正确答案] C
[试题解析]:
由$P^TAP^2=\begin{pmatrix}a+2c & 0 & c\\ 0 & b & 0\\ 2c & 0 & c\end{pmatrix}$,

则$A=(P^{T})^{-1}\begin{pmatrix}a+2c&0&c\\0&b&0\\2c&0&c\end{pmatrix}(P^{2})^{-1}$

$=(P^{-1})^{T}\begin{pmatrix}a+2c&0&c\\0&b&0\\2c&0&c\end{pmatrix}(P^{-1})^{2}$

$=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a+2c&0&c\\0&b&0\\2c&0&c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-1&0&1\end{pmatrix}^{2}$

$=\begin{pmatrix}a&0&0\\0&b&0\\0&0&c\end{pmatrix}$,

故选C.

7. (单选题)
[正确答案] B
[试题解析]:

由$-M_{21}+M_{22}-M_{23}=0$，得$A_{21}+A_{22}+A_{23}=0$.

而$A_{21}+A_{22}+A_{23}$

$=\begin{vmatrix}a+1&b&3\\1&1&1\\1&1&2\end{vmatrix}$

$=\begin{vmatrix}0&b-a-1&2-a\\1&1&1\\0&0&1\end{vmatrix}=a-b+1=0$,

于是$b=a+1$.

$|A|=\begin{vmatrix}a+1&a+1&3\\a&\frac{a+1}{2}&1\\1&1&2\end{vmatrix}=\frac{(1-a)(2a-1)}{2}=-\frac{1}{2}$,

得$a=0$或$a=\frac{3}{2}$.

故选(B).

8. (单选题)
[正确答案] B
[试题解析]:

$EX=\int_{0}^{1}x\cdot 6x(1-x)dx=\frac{1}{2}$,

$E(X-EX)^{3}=\int_{0}^{1}(x-EX)^{3}\cdot 6x(1-x)dx$

$=\int_{0}^{1}(x-\frac{1}{2})^{3}\cdot 6x(1-x)dx=0$.

故选(B).

9. (单选题)
[正确答案] B
[试题解析]:

$Y-2X\sim N(-1,3^2)$,

则$p_1=\Phi(\frac{0+1}{3})=\Phi(\frac{1}{3})>\Phi(0)=\frac{1}{2}$.

$2Y-X\sim N(-2,\sqrt{6}^2)$,

则$p_2=\Phi(\frac{-1+2}{\sqrt{6}})=\Phi(\frac{\sqrt{6}}{6})>\Phi(0)=\frac{1}{2}$.

因为$\Phi(x)$单增，$\frac{\sqrt{6}}{6}>\frac{1}{3}$,所以$p_2>p_1>\frac{1}{2}$.

故选(B).

10. (单选题)

[正确答案] D

[试题解析]:

令$Z=|X-Y|$，则$F_Z(z)=P\{Z\leq z\}=P\{|X-Y|\leq z\}$.

当$z<0$时，$F_Z(z)=0$;

当$z\geq 0$时，

$$F_Z(z)=\iint\limits_{|x-y|\leq z} f(x,y)dxdy=\iint\limits_{|x-y|\leq z}\lambda e^{-\lambda x}\lambda e^{-\lambda y}dxdy$$

$$=2\int_0^{+\infty}dy\int_y^{y+z}\lambda e^{-\lambda x}\lambda e^{-\lambda y}dx=1-e^{-\lambda z}.$$

所以$F_Z(z)=\begin{cases}0, & z<0\\ 1-e^{-\lambda z}, & z\geq 0\end{cases}$.显然$Z=|X-Y|$与$X$同分布.

故选(D).

选择题

1. (单选题)

[正确答案] D

[试题解析]:

$$f(x)=\begin{cases}x+1,|x|<1,\\ 0,\text{其他}\end{cases}$$

由于$\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=2$，$\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=0$,

所以$f(x)$在$x=1$处不连续.

$\lim\limits_{x\to -1^-}f(x)=0$，$\lim\limits_{x\to -1^+}f(x)=0$,

所以$\lim\limits_{x\to -1}f(x)=0=f(-1)$,

所以$f(x)$在$x=-1$处连续.

故选(D).

2. (单选题)

[正确答案] B

[试题解析]:

由于$|\sin x|$的周期是π,

所以

$$I=\int_a^{a+k\pi}|\sin x|\,\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^{k\pi}|\sin x|\,\mathrm{d}x=k\int_0^{\pi}|\sin x|\,\mathrm{d}x=2k,$$

因此，该积分值只与k有关.

故选(B).

3. (单选题)

[正确答案] A

[试题解析]:

$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} dx \int_{\sin x}^{1} f(x,y)dy = \int_{\frac{1}{2}}^{1} dy \int_{\frac{\pi}{6}}^{\arcsin y} f(x,y)dx$，故选A.

4. (单选题)

[正确答案] A

[试题解析]:

$$\ln(2+x) = \ln 2 + \ln\left(1+\frac{1}{2}x\right)$$

$$= \ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^n}{n}.$$

所以，$a_n = \begin{cases} \ln 2, & n=0 \\ (-1)^{n-1}\frac{1}{n2^2}, & n \geq 1 \end{cases}$

当$n \geq 1$，$a_{2n} = -\frac{1}{2n\cdot 2^{2n}}$.

所以，$\sum\limits_{n=0}^{\infty} na_{2n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} na_{2n}$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} n\cdot\left(-\frac{1}{2n\cdot 2^{2n}}\right)$$

$$= -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{2n+1}} = -\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3}{1-\frac{1}{4}} = -\frac{1}{6},$$

故选(A).

5. (单选题)

[正确答案] C

[试题解析]:

由题可知，A的特征值为$1,-2,3$，

故$|A| = 1\times(-2)\times 3 = -6$，$tr(A) = 1+(-2)+3 = 2$，故选C.

6. (单选题)

[正确答案] C

[试题解析]:

由$P^TAP^2 = \begin{pmatrix} a+2c & 0 & c \\ 0 & b & 0 \\ 2c & 0 & c \end{pmatrix}$，

则$A = (P^T)^{-1}\begin{pmatrix} a+2c & 0 & c \\ 0 & b & 0 \\ 2c & 0 & c \end{pmatrix}(P^2)^{-1}$

$$= (P^{-1})^T\begin{pmatrix} a+2c & 0 & c \\ 0 & b & 0 \\ 2c & 0 & c \end{pmatrix}(P^{-1})^2$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a+2c & 0 & c \\ 0 & b & 0 \\ 2c & 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix},$$

故选C.

7.(单选题)
[正确答案] B
[试题解析]:

由$-M_{21}+M_{22}-M_{23}=0$，得$A_{21}+A_{22}+A_{23}=0$.

而$A_{21}+A_{22}+A_{23}$

$$= \begin{vmatrix} a+1 & b & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & b-a-1 & 2-a \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = a-b+1=0,$$

于是$b=a+1$.

$$|A| = \begin{vmatrix} a+1 & a+1 & 3 \\ a & \frac{a+1}{2} & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \frac{(1-a)(2a-1)}{2} = -\frac{1}{2},$$

得$a=0$或$a=\frac{3}{2}$.

故选(B).

8.(单选题)
[正确答案] B
[试题解析]:

$EX=\int_0^1 x\cdot 6x(1-x)dx=\frac{1}{2}$,

$E(X-EX)^3=\int_0^1 (x-EX)^3\cdot 6x(1-x)dx$

$=\int_0^1 (x-\frac{1}{2})^3\cdot 6x(1-x)dx=0$.

故选(B).

9.(单选题)
[正确答案] B
[试题解析]:

$Y-2X\sim N(-1,3^2)$,

则$p_1=\Phi(\frac{0+1}{3})=\Phi(\frac{1}{3})>\Phi(0)=\frac{1}{2}$.

$2Y-X\sim N(-2,\sqrt{6}^2)$,

则$p_2=\Phi(\frac{-1+2}{\sqrt{6}})=\Phi(\frac{\sqrt{6}}{6})>\Phi(0)=\frac{1}{2}$.

因为$\Phi(x)$单增，$\frac{\sqrt{6}}{6}>\frac{1}{3}$,所以$p_2>p_1>\frac{1}{2}$.

故选(B).

10. (单选题)
[正确答案] D
[试题解析]:
令$Z=|X-Y|$，则$F_Z(z)=P\{Z\le z\}=P\{|X-Y|\le z\}$.
当$z<0$时，$F_Z(z)=0$;
当$z\ge 0$时，
$$F_Z(z)=\iint\limits_{|x-y|\le z} f(x,y)dxdy=\iint\limits_{|x-y|\le z}\lambda e^{-\lambda x}\lambda e^{-\lambda y}dxdy$$
$$=2\int_0^{+\infty}dy\int_y^{y+z}\lambda e^{-\lambda x}\lambda e^{-\lambda y}dx=1-e^{-\lambda z}.$$
所以$F_Z(z)=\begin{cases}0, & z<0\\ 1-e^{-\lambda z}, & z\ge 0\end{cases}$.显然$Z=|X-Y|$与$X$同分布.
故选(D).

填空题

11. (填空题)
令$f(x)=\int_0^x\frac{(1+t^2)\sin t^2}{1+\cos t^2}dt$，则$f'(x)=\frac{(1+x^2)\sin x^2}{1+\cos^2 x}\sim\frac{x^2}{2}$，
所以$f(x)\sim\frac{x^3}{6}$，则$k=3$.

12. (填空题)
$$
\begin{aligned}
\text{令} f(x) &= \frac{5}{x^4+3x^2-4}=\frac{5}{(x^2+4)(x^2-1)}\\
&= \frac{5}{(x-1)(x+1)(x^2+4)}\\
&= \frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{Cx+D}{x^2+4}\\
&= \frac{A(x+1)(x^2+4)+B(x-1)(x^2+4)+(Cx+D)(x^2-1)}{(x-1)(x+1)(x^2+4)}\\
&= \frac{(A+B+C)x^3+(A-B+D)x^2+(4A+4B-C)x+(4A-4B-D)}{(x-1)(x+1)(x^2+4)}
\end{aligned}
$$
$$\therefore\begin{cases}A+B+C=0\\ A-B+D=0\\ 4A+4B-C=0\\ 4A-4B-D=5\end{cases}\therefore\begin{cases}A=\frac{1}{2}\\ B=-\frac{1}{2}\\ C=0\\ D=-1\end{cases}$$
$$\therefore f(x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x-1}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x^2+4}$$
$$
\begin{aligned}
\therefore I &= \int_2^{+\infty}\frac{5}{x^4+3x^2-4}dx\\
&= \frac{1}{2}\int_2^{+\infty}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)dx-\int_2^{+\infty}\frac{1}{x^2+4}dx\\
&= \frac{1}{2}\ln\frac{x-1}{x+1}\Big|_2^{+\infty}-\frac{1}{2}\arctan\frac{x}{2}\Big|_2^{+\infty}\\
&= 0-\frac{1}{2}\times\ln\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}\ln 3-\frac{1}{8}\pi.
\end{aligned}
$$

13. (填空题)
由$\begin{cases}f'_x(x,y)=6x^2-18x+12=0\\ f'_y(x,y)=-24y^3+24=0\end{cases}$
得：驻点$(1,1)$和$(2,1)$
$f''_{xx}(x,y)=12x-18$，$f''_{yy}(x,y)=-72y^2$，$f''_{xy}(x,y)=0$.

1)对于驻点$(1,1)$：$A=-6$，$B=0$，$C=-72$，
由$AC-B^2>0$且$A<0$可知，驻点$(1,1)$是$f(x,y)$的极小值点.
2)对于驻点$(2,1)$：$A=6$，$B=0$，$C=-72$，
由$AC-B^2<0$可知，驻点$(2,1)$不是$f(x,y)$的极值点.
故$f(x,y)$的极值点是$(1,1)$.

14. (填空题)

$L(Q)=R-C=PQ-C$
$=\begin{cases}-0.5Q^2+20Q-150, Q\le 20\\ -Q^2+30Q-150, Q>20\end{cases}$,
$L'(Q)=\begin{cases}-Q+20, Q<20\\ -2Q+30, Q>20\end{cases}$,
$L'_+(20)=-10, L'_-(20)=0$,
则$Q=20$为$L(Q)$的不可导点.
$Q<20$时，$L'(Q)>0$；$Q>20$时，$L'(Q)<-10<0$，
则$Q=20$为唯一极大值点，也是最大值点.
$L(20)=50$ ，所以最大利润为50.

15. (填空题)

$r(2E-A)=1$，故$\lambda=2$至少为A的二重特征值.
由$r(E+A)=2$，故$\lambda=-1$至少为A的一重特征值，
故A的特征值为u$\lambda_1=\lambda_2=2,\lambda_3=-1$，则$|A|=-4$，
$|A^*|=|A|^2=16$.

16. (填空题)

设随机变量X表示三次试验中成功的次数，则$X\sim B(3,p)$.
所以$P\{X=3|X\ge 1\}=\frac{P\{X=3,X\ge1\}}{P\{X\ge1\}}=\frac{P\{X=3\}}{P\{X\ge1\}}$
$=\frac{C_3^3p^3}{1-C_3^0(1-p)^3}=\frac{4}{13}$,
故$p=\frac{2}{3}$.

填空题

11. (填空题)

令$f(x)=\int_0^x\frac{(1+t^2)\sin t^2}{1+\cos t^2}dt$，则$f'(x)=\frac{(1+x^2)\sin x^2}{1+\cos^2 x}\sim\frac{x^2}{2}$,
所以$f(x)\sim\frac{x^3}{6}$ ，则$k=3$.

12. (填空题)

令$f(x)=\frac{5}{x^4+3x^2-4}=\frac{5}{(x^2+4)(x^2-1)}$
$=\frac{5}{(x-1)(x+1)(x^2+4)}$
$=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{Cx+D}{x^2+4}$
$=\frac{A(x+1)(x^2+4)+B(x-1)(x^2+4)+(Cx+D)(x^2-1)}{}$

$$= \frac{(A+B+C)x^3+(A-B+D)x^2+(4A+4B-C)x+(4A-4B-D)}{(x-1)(x+1)(x^2+4)}$$

$$\therefore \begin{cases} A+B+C=0 \\ A-B+D=0 \\ 4A+4B-C=0 \\ 4A-4B-D=5 \end{cases} \therefore \begin{cases} A=\frac{1}{2} \\ B=-\frac{1}{2} \\ C=0 \\ D=-1 \end{cases}$$

$$\therefore f(x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x-1}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x^2+4}$$

$$\therefore I=\int_2^{+\infty}\frac{5}{x^4+3x^2-4}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_2^{+\infty}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)dx-\int_2^{+\infty}\frac{1}{x^2+4}dx$$

$$=\frac{1}{2}\ln\frac{x-1}{x+1}\Big|_2^{+\infty}-\frac{1}{2}\arctan\frac{x}{2}\Big|_2^{+\infty}$$

$$=0-\frac{1}{2}\times\ln\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}\ln 3-\frac{1}{8}\pi.$$

13. (填空题)

由$\begin{cases} f'_x(x,y)=6x^2-18x+12=0 \\ f'_y(x,y)=-24y^3+24=0 \end{cases}$

得：驻点$(1,1)$和$(2,1)$

$f''_{xx}(x,y)=12x-18$，$f''_{yy}(x,y)=-72y^2$，$f''_{xy}(x,y)=0$.

1)对于驻点$(1,1)$：$A=-6$，$B=0$，$C=-72$，

由$AC-B^2>0$且$A<0$可知，驻点$(1,1)$是$f(x,y)$的极小值点.

2)对于驻点$(2,1)$：$A=6$，$B=0$，$C=-72$，

由$AC-B^2<0$可知，驻点$(2,1)$不是$f(x,y)$的极值点.

故$f(x,y)$的极值点是$(1,1)$.

14. (填空题)

$L(Q)=R-C=PQ-C$

$=\begin{cases} -0.5Q^2+20Q-150, Q\le 20 \\ -Q^2+30Q-150, Q>20 \end{cases}$,

$L'(Q)=\begin{cases} -Q+20, Q<20 \\ -2Q+30, Q>20 \end{cases}$,

$L'_+(20)=-10, L'_-(20)=0$,

则$Q=20$为$L(Q)$的不可导点.

$Q<20$时，$L'(Q)>0$；$Q>20$时，$L'(Q)<-10<0$，

则$Q=20$为唯一极大值点，也是最大值点.

$L(20)=50$，所以最大利润为50.

15. (填空题)

$r(2E-A)=1$，故$\lambda=2$至少为A的二重特征值.

由$r(E+A)=2$，故$\lambda=-1$至少为A的一重特征值，

故A的特征值为u$\lambda_1=\lambda_2=2,\lambda_3=-1$，则$|A|=-4$,

$|A^*|=|A|^2=16$.

16. (填空题)

设随机变量X表示三次试验中成功的次数，则$X\sim B(3,p)$.

所以$P\{X=3|X\geq 1\}=\frac{P\{X=3,X\geq 1\}}{P\{X\geq 1\}}=\frac{P\{X=3\}}{P\{X\geq 1\}}$
$=\frac{C_3^3p^3}{1-C_3^0(1-p)^3}=\frac{4}{13}$,
故$p=\frac{2}{3}$.

解答题

17. (解答题)

积分区域D关于$y=x$对称，由轮换对称性可得，

$$\iint\limits_D(1+x-y)dxdy=\iint\limits_D(1+y-x)dxdy,$$

故

$$\iint\limits_D(1+x-y)dxdy$$
$$=\frac{1}{2}(\iint\limits_D(1+x-y)dxdy+\iint\limits_D(1+y-x)dxdy)$$
$$=\iint\limits_D 1dxdy$$
$$=\int_{\frac{1}{3}}^{1}(3x-\frac{1}{3x})dx+\int_1^3(\frac{3}{x}-\frac{x}{3})dx$$
$$=\frac{4}{3}-\frac{1}{3}\ln 3+3\ln 3-\frac{4}{3}=\frac{8}{3}\ln 3.$$

18. (解答题)

将$(x,y)=(0,0)$代入原方程得$z(0,0)=-1$;

原方程对x求偏导，得：$z'_x+e^x-y\cdot\frac{2zz'_x}{1+z^2}=0$① ，

从而$z'_x(0,0)=-1$;

①式对x求偏导，得：$z''_{xx}+e^x-y\cdot\frac{\partial\left(\frac{2zz'_x}{1+z^2}\right)}{\partial x}=0$,

从而$z''_{xx}(0,0)=-1$;

原方程对y求偏导，得：$z'_y-\ln(1+z^2)-y\cdot\frac{2zz'_y}{1+z^2}=0$②,

从而$z'_y(0,0)=\ln 2$;

②式对y求偏导得$z''_{yy}-\frac{2zz'_y}{1+z^2}-\frac{2zz'_y}{1+z^2}-y\cdot\frac{\partial\left(\frac{2zz'_y}{1+z^2}\right)}{\partial y}=0$,

从而$z''_{yy}(0,0)=-2\ln 2$;

综上,$\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)\Big|_{(0,0)}=-1-2\ln 2$.

19. (解答题)

$S(t)=\int_t^{2t}xe^{-2x}dx=-\frac{1}{2}\left[(2t+\frac{1}{2})e^{-4t}-(t+\frac{1}{2})e^{-2t}\right]$

则$S'(t)=-te^{-2t}(1-4e^{-2t})$，令$S'(t)=0\Rightarrow t=\ln 2$,

$\because t\in(\ln 2-\delta,\ln 2)$有$S'(t)>0$，$t\in(\ln 2,\ln 2+\delta)$有

$S'(t)<0$,

$\therefore t=\ln 2$为$S(t)$的唯一的极大值点，也是最大值点，

故最大值为$S(\ln 2)=\frac{1}{16}(\ln 2+\frac{3}{4})$.

20. (解答题)

(1)因$|f''(x)| \leq 1$,则$-1 \leq f''(x) \leq 1$.

令$F(x) = f(x) - f(0)(1-x) - f(1)x - \frac{x(1-x)}{2}, x \in (0,1)$.

$F(0) = 0, F(1) = 0, F''(x) = f''(x) + 1 \geq 0$,

则$F(x)$为凹函数，所以$F(x) \leq 0$.

故$f(x) - f(0)(1-x) - f(1)x \leq \frac{x(1-x)}{2}$①.

令$G(x) = f(x) - f(0)(1-x) - f(1)x + \frac{x(1-x)}{2}, x \in (0,1)$

$G(0) = 0, G(1) = 0$，$G''(x) = f''(x) - 1 \leq 0$,

则$G(x)$为凸函数，所以$G(x) \geq 0$.

故$f(x) - f(0)(1-x) - f(1)x \geq -\frac{x(1-x)}{2}$②.

综上①②,得：$|f(x) - f(0)(1-x) - f(1)x| \leq \frac{x(1-x)}{2}$,

$x \in (0,1)$.

(2) 由①知，$f(x) - f(0)(1-x) - f(1)x \leq \frac{x(1-x)}{2}$，$x \in (0,1)$.

$\Rightarrow \int_0^1 [f(x) - f(0)(1-x) - f(1)x]dx \leq \int_0^1 \frac{x(1-x)}{2}dx$,

$\Rightarrow \int_0^1 f(x)dx - \frac{f(0)+f(1)}{2} \leq \frac{1}{12}$.③

由②知，$f(x) - f(0)(1-x) - f(1)x \geq -\frac{x(1-x)}{2}$，$x \in (0,1)$.

$\Rightarrow \int_0^1 [f(x) - f(0)(1-x) - f(1)x]dx \geq \int_0^1 -\frac{x(1-x)}{2}dx$,

$\Rightarrow \int_0^1 f(x)dx - \frac{f(0)+f(1)}{2} \geq -\frac{1}{12}$.④

综上③④：$\left|\int_0^1 f(x)dx - \frac{f(0)+f(1)}{2}\right| \leq \frac{1}{12}$.

21. (解答题)

(1)证明：

由于$\begin{pmatrix} A & \alpha \\ B & \beta \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 6 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & a & a-1 & 0 \\ 2 & -3 & 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

则$r\begin{pmatrix} A & \alpha \\ B & \beta \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} A & \alpha \end{pmatrix}$，故$\begin{cases} Ax = \alpha \\ Bx = \beta \end{cases}$与$Ax = \alpha$同解，

所以$Ax = \alpha$的解均为$Bx = \beta$的解.

(2)由于$Ax = \alpha$的解均为$Bx = \beta$的解，

若$Ax = \alpha$与$Bx = \beta$同解，则与题意矛盾，故$Ax = \alpha$的解是$Bx = \beta$解的真子集，故$Ax = 0$基础解系中解向量的个数小于$Bx = 0$基础解系中解向量的个数，则$3 - r(A) < 3 - r(B)$，故$r(A) > r(B)$.

$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

又$r(A)=3$，故$r(B)<3$，则 $\begin{vmatrix}1 & -1 & a\\ 2 & -3 & 2\end{vmatrix}=0$，得$a=1$.

22. (解答题)

(1)X的概率密度为$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{\theta},0<x<\theta\\ 0,\text{其他}\end{cases}$，

X的分布函数为$F(x)=\begin{cases}0,x<0\\ \frac{1}{\theta}x,0\leq x<\theta\\ 1,x\geq\theta\end{cases}$.

$X_{(n)}$的分布函数为:

$F_{X_{(n)}}(x)=P\{\max\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}\leq x\}$

$=P\{X_1\leq x,X_2\leq x,\cdots,X_n\leq x\}$

$=P\{X_1\leq x\}\cdot P\{X_2\leq x\}\cdot\cdots\cdot P\{X_n\leq x\}=F^n(x)$,

$X_{(n)}$概率密度为

$f_{X_{(n)}}(x)=nF^{n-1}(x)\cdot f(x)$

$=\begin{cases}\frac{n}{\theta^n}x^{n-1},0<x<\theta\\ 0,\text{其他}\end{cases}$.

$E(T_c)=cE(X_{(n)})=c\int_0^\theta x\cdot\frac{n}{\theta^n}x^{n-1}dx=\frac{cn}{n+1}\theta$.

令$E(T_c)=\frac{cn}{n+1}\theta=\theta$，得$c=\frac{n+1}{n}$.

(2) $E(T_c^2)=c^2E(X_{(n)}^2)=c^2\int_0^\theta x^2\cdot\frac{n}{\theta^n}x^{n-1}dx=\frac{c^2n}{n+2}\theta^2$.

又$h(c)=E(T_c-\theta)^2$

$=E(T_c^2-2\theta T_c+\theta^2)$

$=E(T_c^2)-2\theta E(T_c)+\theta^2$

$=\frac{c^2n}{n+2}\theta^2-\frac{2cn}{n+1}\theta^2+\theta^2$.

$h'(c)=\frac{2cn}{n+2}\theta^2-\frac{2n}{n+1}\theta^2$,

令$h'(c)=0$得$c=\frac{n+2}{n+1}$.

$h''(c)=\frac{2n}{n+2}\theta^2>0$,

所以当$c=\frac{n+2}{n+1}$时，$h(c)$最小.

解答题

17. (解答题)

积分区域D关于$y=x$对称，由轮换对称性可得，

$\iint\limits_D(1+x-y)dxdy=\iint\limits_D(1+y-x)dxdy$,

故

$\iint\limits_D(1+x-y)dxdy$

$=\frac{1}{2}(\iint\limits_D(1+x-y)dxdy+\iint\limits_D(1+y-x)dxdy)$

$=\iint 1dxdy$

D

$= \int_{\frac{1}{3}}^{1}(3x - \frac{1}{3x})dx + \int_{1}^{3}(\frac{3}{x} - \frac{x}{3})dx$

$= \frac{4}{3} - \frac{1}{3}\ln 3 + 3\ln 3 - \frac{4}{3} = \frac{8}{3}\ln 3.$

18. (解答题)

将$(x,y) = (0,0)$代入原方程得$z(0,0) = -1$;

原方程对x求偏导，得：$z'_x + e^x - y \cdot \frac{2zz'_x}{1+z^2} = 0$①，

从而$z'_x(0,0) = -1$;

①式对x求偏导，得：$z''_{xx} + e^x - y \cdot \frac{\partial\left(\frac{2zz'_x}{1+z^2}\right)}{\partial x} = 0$,

从而$z''_{xx}(0,0) = -1$;

原方程对y求偏导，得：$z'_y - \ln(1+z^2) - y \cdot \frac{2zz'_y}{1+z^2} = 0$②,

从而$z'_y(0,0) = \ln 2$;

②式对y求偏导得$z''_{yy} - \frac{2zz'_y}{1+z^2} - \frac{2zz'_y}{1+z^2} - y \cdot \frac{\partial\left(\frac{2zz'_y}{1+z^2}\right)}{\partial y} = 0$,

从而$z''_{yy}(0,0) = -2\ln 2$;

综上, $\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)\Big|_{(0,0)} = -1 - 2\ln 2.$

19. (解答题)

$S(t) = \int_t^{2t} xe^{-2x}dx = -\frac{1}{2}\left[(2t + \frac{1}{2})e^{-4t} - (t + \frac{1}{2})e^{-2t}\right]$

则$S'(t) = -te^{-2t}(1 - 4e^{-2t})$，令$S'(t) = 0 \Rightarrow t = \ln 2$,

$\because t \in (\ln 2 - \delta, \ln 2)$有$S'(t) > 0$，$t \in (\ln 2, \ln 2 + \delta)$有$S'(t) < 0$,

$\therefore t = \ln 2$为$S(t)$的唯一的极大值点，也是最大值点，

故最大值为$S(\ln 2) = \frac{1}{16}(\ln 2 + \frac{3}{4})$.

20. (解答题)

(1)因$|f''(x)| \leq 1$,则$-1 \leq f''(x) \leq 1$.

令$F(x) = f(x) - f(0)(1-x) - f(1)x - \frac{x(1-x)}{2}, x \in (0,1)$.

$F(0) = 0, F(1) = 0, F''(x) = f''(x) + 1 \geq 0$,

则$F(x)$为凹函数，所以$F(x) \leq 0$.

故$f(x) - f(0)(1-x) - f(1)x \leq \frac{x(1-x)}{2}$①.

令$G(x) = f(x) - f(0)(1-x) - f(1)x + \frac{x(1-x)}{2}, x \in (0,1)$

$G(0) = 0, G(1) = 0$，$G''(x) = f''(x) - 1 \leq 0$,

则$G(x)$为凸函数，所以$G(x) \geq 0$.

故$f(x) - f(0)(1-x) - f(1)x \geq -\frac{x(1-x)}{2}$②.

综上①②,得：$|f(x) - f(0)(1-x) - f(1)x| \leq \frac{x(1-x)}{2}$,
$x \in (0,1)$.

(2) 由①知，$f(x) - f(0)(1-x) - f(1)x \leq \frac{x(1-x)}{2}$，$x \in (0,1)$.

$\Rightarrow \int_0^1 [f(x)-f(0)(1-x)-f(1)x]dx \le \int_0^1 \frac{x(1-x)}{2}dx$,

$\Rightarrow \int_0^1 f(x)dx-\frac{f(0)+f(1)}{2}\le\frac{1}{12}$.③

由②知，$f(x)-f(0)(1-x)-f(1)x\ge-\frac{x(1-x)}{2}$，$x\in(0,1)$.

$\Rightarrow \int_0^1 [f(x)-f(0)(1-x)-f(1)x]dx \ge \int_0^1 -\frac{x(1-x)}{2}dx$,

$\Rightarrow \int_0^1 f(x)dx-\frac{f(0)+f(1)}{2}\ge-\frac{1}{12}$.④

综上③④：$\left|\int_0^1 f(x)dx-\frac{f(0)+f(1)}{2}\right|\le\frac{1}{12}$.

21. (解答题)

(1)证明:

由于$\begin{pmatrix} A & \alpha \\ B & \beta \end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 6 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & a & a-1 & 0 \\ 2 & -3 & 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

则$r\begin{pmatrix} A & \alpha \\ B & \beta \end{pmatrix}=r\begin{pmatrix} A & \alpha \end{pmatrix}$，故$\begin{cases} Ax=\alpha \\ Bx=\beta \end{cases}$与$Ax=\alpha$同解，

所以$Ax=\alpha$的解均为$Bx=\beta$的解.

(2)由于$Ax=\alpha$的解均为$Bx=\beta$的解，

若$Ax=\alpha$与$Bx=\beta$同解，则与题意矛盾，故$Ax=\alpha$的解是$Bx=\beta$解的真子集，故$Ax=0$基础解系中解向量的个数小于$Bx=0$基础解系中解向量的个数，则$3-r(A)<3-r(B)$，故$r(A)>r(B)$.

又$r(A)=3$，故$r(B)<3$，则$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & a \\ 2 & -3 & 2 \end{vmatrix}=0$，得$a=1$.

22. (解答题)

(1)X的概率密度为$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{\theta}, 0<x<\theta \\ 0, 其他 \end{cases}$,

X的分布函数为$F(x)=\begin{cases} 0, x<0 \\ \frac{1}{\theta}x, 0\le x<\theta \\ 1, x\ge\theta \end{cases}$.

$X_{(n)}$的分布函数为:

$F_{X_{(n)}}(x)=P\{\max\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}\le x\}$

$=P\{X_1\le x,X_2\le x,\cdots,X_n\le x\}$

$=P\{X_1\le x\}\cdot P\{X_2\le x\}\cdot\cdots\cdot P\{X_n\le x\}=F^n(x)$,

$X_{(n)}$概率密度为

$f_{X_{(n)}}(x)=nF^{n-1}(x)\cdot f(x)$

$=\begin{cases} \frac{n}{\theta^n}x^{n-1}, 0<x<\theta \\ 0, 其他 \end{cases}.$

$E(T_c)=cE(X_{(n)})=c\int_0^\theta x\cdot\frac{n}{\theta^n}x^{n-1}dx=\frac{cn}{n+1}\theta.$

令$E(T_c)=\frac{cn}{n+1}\theta=\theta$，得$c=\frac{n+1}{n}$.

(2) $E(T_c^2)=c^2E(X_{(n)}^2)=c^2\int_0^\theta x^2\cdot\frac{n}{\theta^n}x^{n-1}dx=\frac{c^2n}{n+2}\theta^2.$

又$h(c)=E(T_c-\theta)^2$

$=E(T_c^2-2\theta T_c+\theta^2)$

$=E(T_c^2)-2\theta E(T_c)+\theta^2$

$=\frac{c^2n}{n+2}\theta^2-\frac{2cn}{n+1}\theta^2+\theta^2.$

$h'(c)=\frac{2cn}{n+2}\theta^2-\frac{2n}{n+1}\theta^2,$

令$h'(c)=0$得$c=\frac{n+2}{n+1}$.

$h''(c)=\frac{2n}{n+2}\theta^2>0,$

所以当$c=\frac{n+2}{n+1}$时，$h(c)$最小.